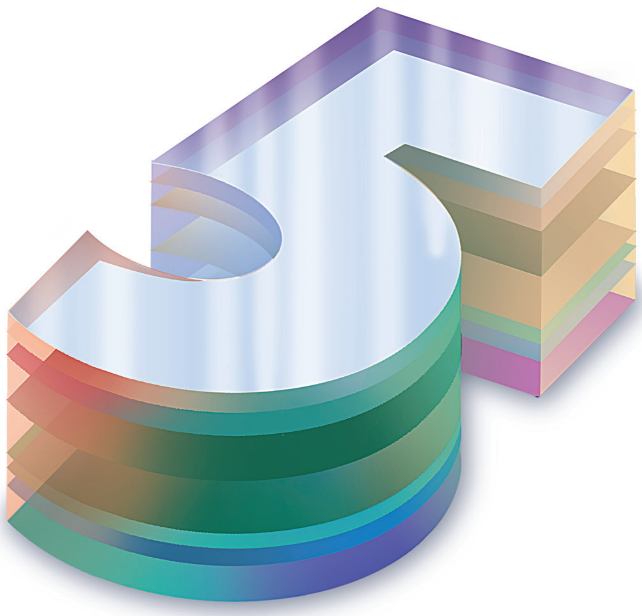
Razonamiento Matemático

Quinto grado
de Secundaria



Editorial San Marcos

Lexicom

Intelectum
EVOLUCIÓN

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Razonamiento matemático
Quinto grado de Secundaria
Colección Intelectum Evolución

© Ediciones Lexicom S. A. C. - Editor
RUC 20545774519
Jr. Dávalos Lissón 135, Cercado de Lima
Teléfonos: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
Fax: 330 - 2405
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com
www.editorialsanmarcos.com

Responsable de edición:
Yisela Rojas Tacuri

Equipo de redacción y corrección:
Eder Gamarra Tiburcio / Jhonatan Peceros Tinco
Josué Dueñas Leyva / Saby Camacho Martinez
Óscar Díaz Huamán

Diseño de portada:
Miguel Mendoza Cruzado / Cristian Cabezudo Vicente

Retoque fotográfico:
Luis Armestar Miranda

Composición de interiores:
Miguel Lancho / Carol Clapés Hurtado / Melissa Chau /
Cristian Cabezudo / Vilma Jacquelín Añazco /
Lourdes Zambrano Ibarra

Gráficos e Ilustraciones:
Juan Manuel Oblitas / Ivan Mendoza Cruzado

Primera edición: 2013
Tiraje: 9000

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2013-18811
ISBN: 978-612-313-116-6
Registro de Proyecto Editorial N.° 31501001300694

Impreso en Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 978 - Lima.
Teléfonos 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com

Impresión:
Industria Gráfica Cimagraf S.A.C.
Psje. Santa Rosa 220 - 226 N.° 220, Santa Angélica, Lima, ATE
RUC 20136492277

Este libro se terminó de imprimir
en la Industria Gráfica Cimagraf S.A.C.
Psje. Santa Rosa 220 - 226 N.° 220, Santa Angélica, Lima, ATE
RUC 20136492277

La Colección Intelectum Evolución para Secundaria ha sido concebida a partir de los lineamientos pedagógicos establecidos en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, además se alinea a los patrones y estándares de calidad aprobados en la Resolución Ministerial N.º 0304-2012-ED.

La divulgación de la Colección Intelectum Evolución se adecúa a lo dispuesto en la Ley 29694, modificada por la Ley N.º 29839, norma que protege a los usuarios de prácticas ilícitas en la adquisición de material escolar.

El docente y el padre de familia orientarán al estudiante en el debido uso de la obra.

INTELECTUM

Razonamiento matemático

Presentación

El vocablo *razonamiento* proviene del verbo *razonar* que significa 'inferir, conjeturar ordenando ideas en la mente para llegar a una conclusión'.

De esta manera podemos afirmar que el razonamiento matemático es aquella disciplina académica que basada en los conocimientos de la matemática busca desarrollar las aptitudes y las habilidades lógicas de los estudiantes para deducir una solución a un problema, para sacar una consecuencia de algo por indicios y conducir a un resultado.

Teniendo en consideración cuán importante es potenciar las habilidades, hemos elaborado el libro de Razonamiento matemático como un instrumento pedagógico que conllevará a esta meta. La estructura de cada libro está diseñada de acuerdo a los nuevos lineamientos de la educación cuyo objetivo es que todos desarrollen la capacidad de pensar, creativa y críticamente y procesen de manera exitosa los conocimientos.

Nuestra propuesta pedagógica se inicia con páginas binarias conformadas por una lectura de contexto matemático que motivará al estudiante a conectarse con este conocimiento al corroborar que le servirá y le será imprescindible en su vida actual y futura. Complementan las binarias la sección *Matemática recreativa*, que propone un problema cuyas pautas para solucionarlo se darán a través de un diálogo entre los personajes de la colección (mediadores cognitivos).

Continúa el *Marco teórico* desarrollado de manera clara y precisa en cuatro unidades, que tienen como soporte los problemas resueltos, donde desarrollamos diversas estrategias que entrenarán las capacidades específicas del estudiante.

Todo este marco teórico es aplicado a la práctica a través de dos secciones:

Actividades de razonamiento, para que el estudiante inicie la aplicación del conocimiento procesado. Al final de cada actividad hay un reto. Y la sección *Refuerza practicando*, que afianzará aún más la práctica con problemas propuestos por niveles, para que el avance sea de modo progresivo y se pueda ser capaz de afrontar nuevos y grandes retos.

Todo lo propuesto en la colección contiene situaciones de aprendizaje variadas que permitirán obtener resultados cualitativos y cuantitativos en el proceso cognoscitivo de los estudiantes.

Nuestro firme propósito es formar jóvenes capacitados, preparados, competitivos, eficientes y eficaces.

¡A esforzarse y a triunfar!

Estructura del libro

Página que inicia la unidad

Conformada por una lectura matemática de contexto cotidiano que conducirá al estudiante a una motivación concreta al comprobar que la matemática está asociada a su entorno real.



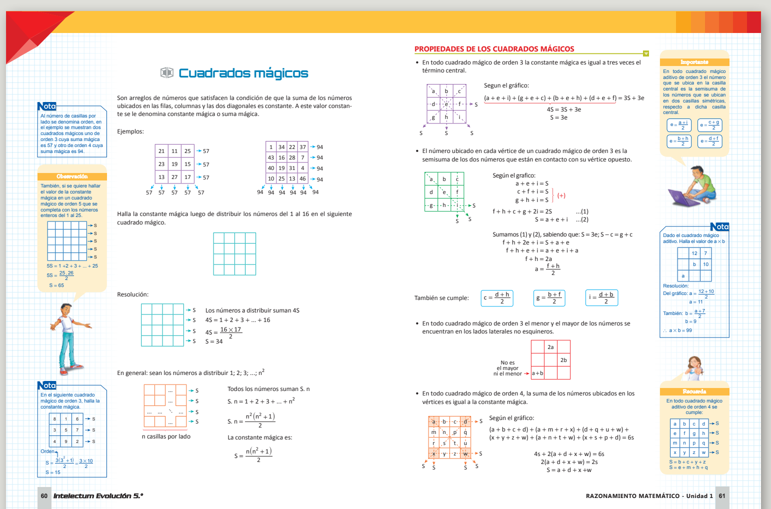


Matemática recreativa

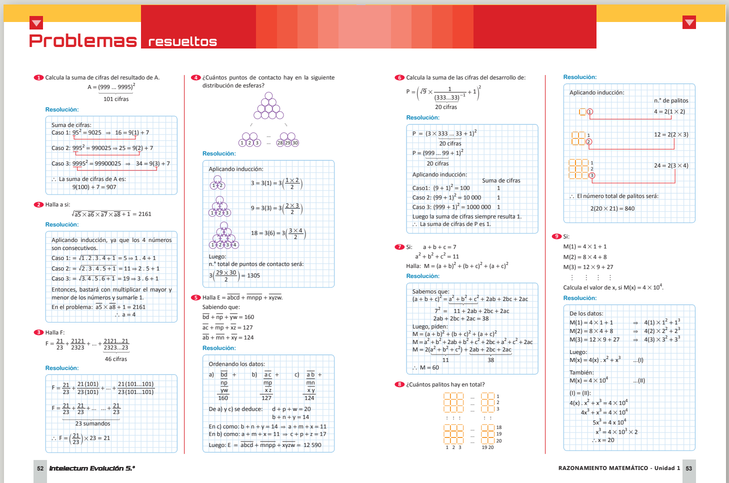
Sección que inicia de manera entretenida y divertida los conocimientos con un problema matemático que a través de un diálogo entre los personajes de la colección (mediadores cognitivos) se proporcionarán las pautas para solucionarlo.

Contenido teórico

Compuesto por una variedad de conocimientos enfocados en el razonamiento aritmético, razonamiento algebraico y razonamiento geométrico los que a su vez ponen en práctica el razonamiento lógico abstracto, el razonamiento operativo y el razonamiento organizativo. El desarrollo de cada tema se ha hecho con criterio pedagógico teniendo en cuenta el grado académico.

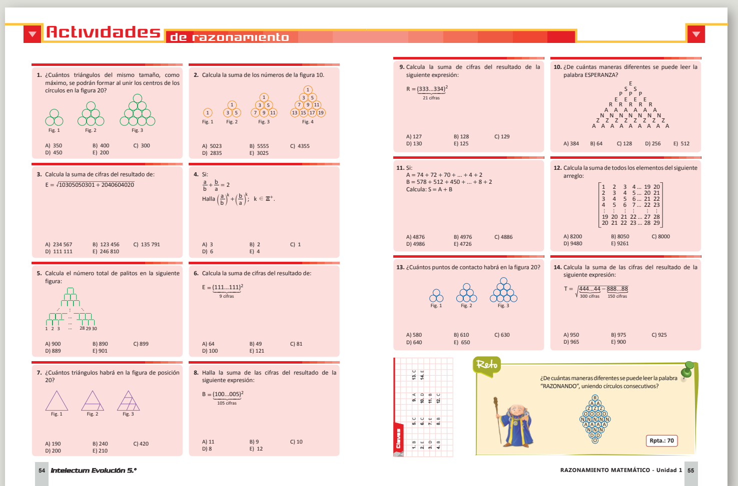






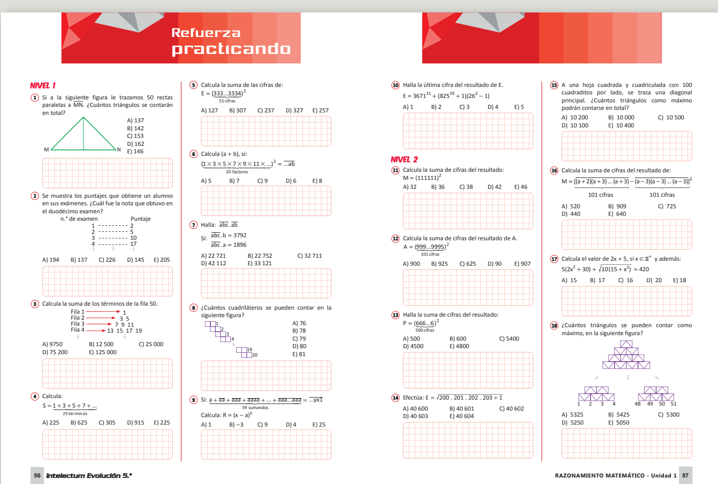
Problemas resueltos

Gran cantidad de problemas desarrollados por tema donde aplicamos diversas estrategias que entrenarán las capacidades del estudiante.



Actividades de razonamiento

Actividades propuestas para que el estudiante empiece su entrenamieto del conocimiento procesado; son actividades elaboradas también por tema. Al final de cada actividad hay un reto que el alumno debe intentar resolver.



Refuerza practicando

Problemas clasificados en niveles con la finalidad de que el alumno refuerce en forma progresiva y llegue preparado para enfrentarse a grandes y nuevos retos.

Contenido

UNIDAD 1



El tiempo es oro

Es una frase que escuchamos muy a menudo, pero es totalmente cierto, el tiempo es oro y en muchas ocasiones es dinero, por ejemplo en todo lo relacionado con los estudios universitarios, cuanto más tiempo tardes en terminarlos más dinero te costará.

Sí, estamos en verano, vacaciones, descanso, tranquilidad, playa, etc, pero pronto comenzarás la universidad, te conviene ir lo mejor preparado posible para encarar este comienzo con todas las garantías.

Infórmate si tu universidad imparte algún curso cero de matemáticas o de letras, y si es así aprovéchalo. O también puedes apuntarte a una academia o pedir ayuda a algún profesor particular que pueda rellenar ese "hueco" que hay ahora mismo en tus conocimientos matemáticos para poder así afrontar con garantías estas asignaturas y contribuir con ello a que termines de forma satisfactoria tus estudios universitarios.

Quizás pienses que lo puedes solucionar cuando llegue el momento, durante el propio curso. Y puede que tengas razón, pero es muy posible que eso te cueste tener que dejar de lado alguna otra asignatura, con el consiguiente aumento de tiempo que tardarás en terminar la universidad, y también de dinero que costará tu matrícula. Por eso te conviene ponerle remedio antes que comience el curso.

Una vez en la universidad, en la mayoría de las ocasiones da igual las horas de estudio que les dediquen a los cursos; las carencias son tan graves y profundas que no permiten a los alumnos entender los contenidos de las asignaturas, llegando a ser perjudiciales las horas de estudio por lo frustrados que estos quedan.

Quizás ellos no sabían en su momento que podían intentar ponerle remedio de antemano a su situación, pero tú ya lo sabes. **Aprovecha este conocimiento de la situación, todavía estás a tiempo.**

Matemática recreativa

Promedio engañoso

Pedro y Pablo son dos automovilistas que hacen habitualmente el mismo viaje de ida y vuelta entre dos ciudades, cada uno en su auto.

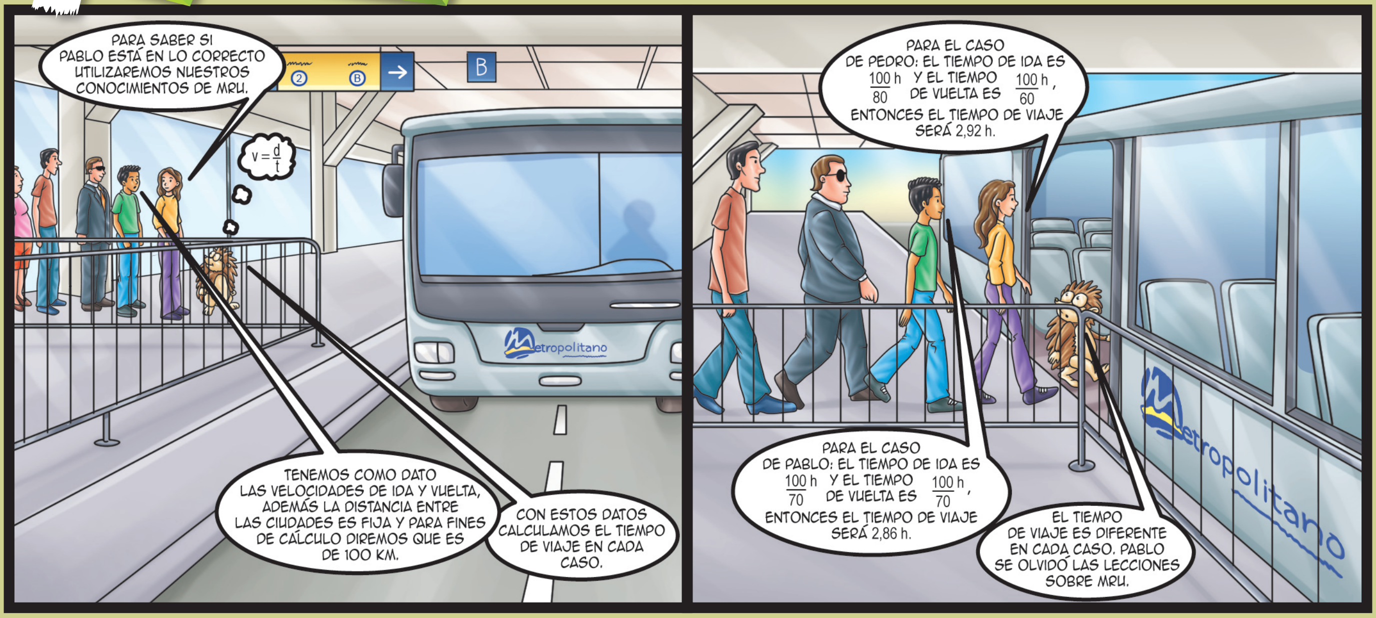
En cierta ocasión hablaron del asunto y Pedro le dijo a Pablo: "El viaje de ida lo hago a 80 km/h y la vuelta a 60 km/h".

Pablo contestó a Pedro: "Por las características de mi auto y la carretera, hago el viaje de ida y vuelta a la velocidad constante de 70 km/h, que es el promedio de las velocidades que tú me has dicho, de modo que empleamos el mismo tiempo de viaje".

¿El razonamiento de Pablo es correcto? ¿Emplean el mismo tiempo en el viaje?



DIÁLOGO

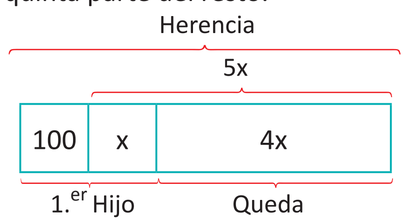


Planteo de ecuaciones

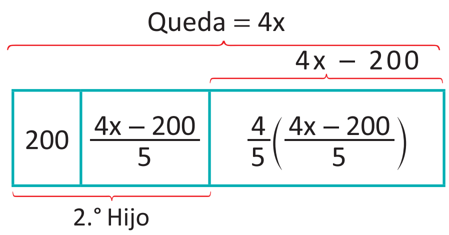
Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas entre cantidades, basta con traducir dicho problema al idioma algebraico.

Ejemplo:
Un padre deja una herencia para que sea repartida entre sus hijos de la siguiente manera: al primero S/.100 y la quinta parte del resto, al segundo S/.200 y la quinta parte del resto, al tercero S/.300 y la quinta parte del nuevo resto y así sucesivamente con todos los hijos. Si al final todos recibieron la misma cantidad de dinero, ¿cuánto es la herencia y cuánto son los hijos?

Resolución:
Al primer hijo: S/.100 y la quinta parte del resto.



Del gráfico: herencia = 5x + 100
Al segundo hijo: S/.200 y la quinta parte de lo que va quedando.



Y así sucesivamente con todos los hijos, al final todos reciben la misma cantidad de dinero.
Entonces de acuerdo a este dato, planteamos que lo recibido por el primer hijo es igual a lo recibido por el segundo hijo. Es decir:

$$100 + x = 200 + \frac{4x - 200}{5}$$

$$x - \left(\frac{4x - 200}{5}\right) = 100$$

$$\frac{5x - 4x + 200}{5} = 100$$

$$x + 200 = 500$$

$$x = 300$$

Reemplazando:
Herencia = 5(300) + 100 = S/.1600
Lo que le tocó al primer hijo es: 100 + 300 = S/.400
Es lo mismo que le tocó a todos, entonces:

$$\therefore \text{ n.° de hijos} = \frac{1600}{400} = 4$$

Importante

Tanto los números pares consecutivos como los números impares consecutivos se diferencian en dos unidades.



Nota

- $2x + 5 = 3x - 7$
  Es una ecuación de primer grado con una sola variable.
- $x^2 + 5x - 6 = 0$
  Es una ecuación de segundo grado con una sola variable.
- $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$
  Es un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables.



Observación

"A excede a B en x", se puede enunciar como:

- A es mayor que B en x.
- El exceso de A sobre B es x.
- B es excedido por A en x.
- La diferencia entre A y B es x.

Problemas resueltos

1 En una colecta se reunió S/.2300. ¿Cuántas personas colaboraron, si el número de nuevos soles que dio cada uno excede en 4 al número de personas?

Resolución:

De los datos:
n.° de personas: n
Cantidad de dinero por persona: n + 4

Si se reunió en total S/.2300:

$n(n+4) = 2300$

$n^2 + 4n - 2300 = 0$

n ╳ +50
n ╳ −46

$(n+50)(n-46) = 0$

$n = -50 \lor n = 46$

$\therefore$ El número de personas es 46.

2 En un examen de 30 preguntas, cada respuesta correcta vale 4 puntos, la incorrecta −1 y en blanco 0. Si un estudiante obtuvo 82 puntos y notó que por cada respuesta en blanco tiene 3 correctas, ¿cuántas contestó incorrectamente?

Resolución:

Haciendo un esquema:

30

Blanco	Correctas	Incorrectas
x	3x	30 − 4x
0 puntos	4 puntos	−1 punto

En total obtuvo 82 puntos:

$0(x) + 4(3x) + (-1)(30 - 4x) = 82$

$12x + 4x - 30 = 82$

$16x = 112 \Rightarrow x = 7$

Finalmente:
Incorrectas $= 30 - 4(7) = 2$

3 Yo tengo el triple de la mitad que tú tienes, más S/.10. Si tú tuvieras el doble de lo que tienes, tendrías S/.5 más de lo que tengo. ¿Cuánto tengo más que tú?

Resolución:

Según los datos:
Tú: 2x
Yo: 3x + 10

Por condición del problema:

$4x - (3x + 10) = 5$

$4x - 3x - 10 = 5$

$x = 15$

Luego:
Tú: 30
Yo: 55
Piden: $55 - 30 =$ S/.25

4 Mario dice: Ayer tuve la mitad de lo que tengo hoy, y lo que tengo hoy es el triple de lo que tuve anteayer, que es S/.40 menos de lo que tuve ayer. ¿Cuánto tiene Mario?

Resolución:

De los datos
Anteayer: 2x
Ayer: 3x
Hoy: 6x
Lo que tuve anteayer es S/.40 menos de lo que tuve ayer:

$3x - 2x = 40$

$x = 40$

Mario tiene: $6x = 6(40) =$ S/.240

5 En una fiesta la relación de mujeres y hombres es de 3 a 4. En un momento dado se retiran 6 damas y llegan 3 hombres, con lo que la relación es ahora de 3 a 5. Indica ¿cuántas mujeres deben llegar para que la relación sea de 1 a 1?

Resolución:

De los datos: $\frac{M}{H} = \frac{3k}{4k}$

Luego se retiran 6 damas y llegan 3 hombres:

$\frac{3k - 6}{4k + 3} = \frac{3}{5}$

$15k - 30 = 12k + 9$

$3k = 39 \Rightarrow k = 13$

Luego: $M = 33,\ H = 55$

Sea x la cantidad de mujeres que deben llegar para que la relación sea de 1 a 1.

$33 + x = 55$

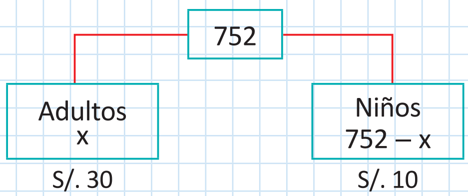
$x = 22$

$\therefore$ Deben llegar 22 mujeres.

6 En un teatro las entradas de adultos costaban S/.30 y la de los niños S/.10. Cierto día acudieron un total de 752 espectadores y se recaudó S/.18 240. Da como respuesta la suma de cifras del número de adultos que asistieron ese día.

Resolución:

Haciendo un esquema:



Por condición del problema:

$$30x + 10(752 - x) = 18\,240$$

$$30x + 7520 - 10x = 18\,240$$

$$20x = 10\,720 \Rightarrow x = 536$$

Piden: $5 + 3 + 6 = 14$

7 En un corral se observa que el número de patos excede en 8 al número de pavos. Además, si incluimos 12 pavos y quitamos 10 patos, entonces el número de pavos sería el triple del número de patos. ¿Cuál es el número de patos?

Resolución:

Según los datos:

n.° de patos: $x + 8$

n.° de pavos: x

Por condición del problema:

$$x + 12 = 3(x + 8 - 10)$$

$$x + 12 = 3(x - 2)$$

$$x + 12 = 3x - 6$$

$$2x = 18 \Rightarrow x = 9$$

$\therefore$ n.° de patos: $9 + 8 = 17$

8 Una señora pesa 90 kg más 1/10 del peso de su hija y la hija pesa 90 kg más 1/10 del peso de la señora. ¿Cuánto pesan las 2 juntas?

Resolución:

Según los datos:

$$\text{Señora} = 90 + \frac{\text{Hija}}{10} \quad ...(I)$$

$$\text{Hija} = 90 + \frac{\text{Señora}}{10} \quad ...(II)$$

Reemplazando (I) en (II):

$$\text{Hija} = 90 + \frac{900 + \text{Hija}}{100}$$

$$100\text{Hija} = 9000 + 900 + \text{Hija}$$

$$99\text{Hija} = 9900$$

$$\text{Hija} = 100$$

Luego: $\text{Señora} = 90 + \frac{100}{10} = 100$

$\therefore$ Juntas pesan 200 kg.

9 Entre 10 personas tenían que pagar una cierta cantidad de dinero, pero resulta que 4 de ellos solo pueden pagar la mitad de lo que les corresponde, obligando de esta manera a que cada uno de los restantes dé 40 soles más. Halla la cantidad de dinero a pagar.

Resolución:

Sea x la cantidad de dinero.

Lo que paga cada persona: $x/10$

Pero 4 de ellos pagan la mitad: $x/20$

Los 6 restantes pagan S/.40 más: $x/10 + 40$

Luego:

Cantidad total de dinero = Lo que pagan 4 de ellos + Lo que pagan los restantes

$$x = 4\left(\frac{x}{20}\right) + 6\left(\frac{x}{10} + 40\right)$$

$$x = \frac{x}{5} + \frac{3x}{5} + 240$$

$$x = \frac{4x}{5} + 240$$

$$\frac{x}{5} = 240 \Rightarrow x = 1200$$

$\therefore$ Cantidad de dinero = S/.1200

Actividades de razonamiento

1. Halla un número cuyo cuadrado, disminuido en 119 es igual a 10 veces el exceso del número con respecto a 8. Da como respuesta el mayor de ellos.

A) 13 B) 10 C) 5 D) 15 E) 8

2. Si al numerador de la fracción 3/5 se le suma un número y al denominador se le resta el mismo número, se obtiene otra fracción equivalente a la inversa de la fracción dada. Calcula el número.

A) 4 B) 8 C) 10 D) 2 E) 6

3. Martina compró cierto número de correas por S/.240. Si hubiera comprado 3 correas más con el mismo dinero, cada correa le habría costado S/.4 menos. ¿Cuánto le costó cada correa?

A) S/.30 B) S/.20 C) S/.10 D) S/.35 E) S/.40

4. Yo tengo el triple de la mitad de lo que tú tienes, más 10 soles. Si tuvieras el doble de lo que tienes, tendrías 5 soles más de lo que tengo. ¿Cuánto me quedaría, si compro un artículo donde gasto la cuarta parte de lo que no gasto?

A) S/.30 B) S/.55 C) S/.44 D) S/.77 E) S/.66

5. En un corral hay N aves entre patos y gallinas. Si el número de patos es a N como 3 es a 7; y la diferencia entre gallinas y patos es 20. ¿Cuál es la relación entre patos y gallinas que quedan luego de vender 50 gallinas?

A) 3a 1 B) 3 a 2 C) 7 a 5 D) 2 a 1 E) 5 a 3

6. Se desea cercar un jardín de forma rectangular, uno de cuyos lados es la pared de la casa. Si el área del jardín es 200 m^2 y para cercarlo se desea utilizar la menor cantidad de cerco, ¿cuáles son las dimensiones de dicho jardín?

A) 8 m y 25 m B) 10 m y 20 m C) 15 m y 12 m
D) 4 m y 50 m E) 25 m y 20 m

7. Tengo una manzana verde, una manzana roja y una naranja. Quiero averiguar cuánto pesan, pero solo puede pesarlas de dos en dos. La manzana verde y roja juntas pesan 430 g; la manzana verde y la naranja juntas pesan 370 g; la manzana roja y la naranja juntas pesan 360 g. ¿Cuánto pesa la manzana roja?

A) 210 g B) 150 g C) 220 g D) 180 g E) 200 g

8. Con S/. 16 464 se han comprado latas de sardinas, en cierto número de cajones; cada uno de los cuales contiene un número de latas que es el triple del número de cajones. Si Cada lata cuesta un número de soles que es el doble del número de cajones, ¿cuántos cajones de latas de sardinas se compró?

A) 17 B) 16 C) 18 D) 14 E) 15

9. Si dos números suman 49; siendo uno múltiplo de 5 y el otro de 6, halla el mayor de los dos números.

A) 13 B) 25 C) 20 D) 10 E) 15

10. En una fiesta se observan 15 mujeres sentadas y tantas parejas bailando como el doble de varones sentados. En la siguiente pieza musical se observa que todas las mujeres se encuentran bailando y 3 varones se encuentran sentados ¿Cuántas personas habría en la fiesta si hubiera el cuádruple de varones y el triple de mujeres?

A) 160 B) 260 C) 460 D) 280 E) 369

11. Si un ladrillo pesa m kg; dos ladrillos pesan juntos (2y – 1) kg y tres ladrillos pesan (m + y) kg, ¿cuánto pesarán cuatro ladrillos juntos? (Los ladrillos son del mismo peso)

A) 6 kg B) 3 kg C) 2 kg D) 5 kg E) 4 kg

12. Para ganar S/. 28 en la rifa de una radio, se hicieron 90 tickets, vendiéndose únicamente 75 y originando así una pérdida de S/17. Halla el valor de la radio.

A) S/.242 B) S/.312 C) S/.412
D) S/.200 E) S/.144

13. Salvador juega el "tiro al blanco" con la condición de que por cada tiro que acierte recibirá S/.5 y pagará S/.2 por cada uno de los que falle. Después de 18 tiros ha recibido S/. 55. ¿Cuántos tiros acertó?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 9 E) 10

14. Cada vez que Raúl se encuentra con Claudia, este le duplica el dinero a ella, y en agradecimiento Claudia le da S/.1. Si en un día se han encontrado 2 veces; luego de las cuales Claudia tiene S/.25. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente Claudia?

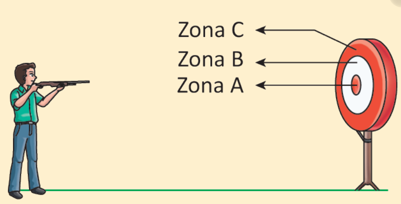
A) 4 B) 6 C) 5 D) 3 E) 7

Claves

1. A
2. D
3. B
4. C
5. D
6. B
7. A
8. D
9. B
10. E
11. C
12. A
13. A
14. E

Reto

Panchito con S/.326 interviene en un juego. Este juego consiste en que si acierta en la zona A le dan S/.20, pero si acierta en B o C debe entregar S/.10 ó S/.2, respectivamente. Si después de 12 juegos, el número de veces que recibió es mayor al número de veces que entregó dinero. Determina cuántas veces acertó en A, si Panchito se retiró con S/.500.



Rpta.: 9

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Entre A y B tienen 1154 soles y el dinero de B es excedido por el de A en 506 soles. Luego:
   I. Si B recibe S/.253, entonces A y B tendrían la misma cantidad.
   II. B tiene S/.324.
   III. Si A pierde S/.330, con lo que queda puede comprar un terno de S/.498.

   Son ciertas:

   A) Todas B) I y II C) II y III
   D) I y III E) Solo II

2. Halla el producto de dos números cuya suma es 7 veces su diferencia. Además, si le aumentamos una unidad a la suma y a la diferencia, esta diferencia sería la quinta parte de la nueva suma.

   A) 32 B) 40 C) 44 D) 48 E) 56

3. Se sabe que una corbata y un sombrero cuestan S/.50, y que 6 sombreros cuestan como 4 corbatas. ¿Cuánto cuestan 8 corbatas?

   A) S/.160 B) S/.200 C) S/.240
   D) S/.320 E) S/.400

4. Si la mitad del tiempo transcurrido desde las 7 a. m. es una tercera parte del tiempo que falta para las 10 p.m., ¿qué hora es?

   A) 12 m. B) 1 p. m. C) 2 a. m.
   D) 3 p. m. E) 5 p. m.

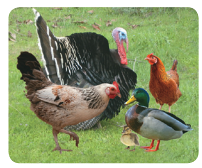
5. Ayer gané 20 soles más que hoy. Si lo que gané hoy son los 5/6 de lo que gané ayer, ¿cuánto gané hoy?

   A) S/.80 B) S/.100 C) S/.120
   D) S/.150 E) S/.140

6. Se toma un número impar, se le suma los 3 números pares que le preceden y el cuádruple del número impar que le sigue, obteniéndose en total 199 unidades. El menor de los sumandos es:

   A) 20 B) 22 C) 24 D) 25 E) 27

7. En una granja se tienen pavos, gallinas, y patos. Sin contar las gallinas tenemos 5 aves, sin contar los pavos tenemos 7 aves, y sin contar los patos tenemos 4 aves. Luego el número de gallinas es:

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

8. Si se divide 96 en tres partes, tales que la primera sea el triple de la segunda y la tercera igual a la suma de la primera y la segunda, ¿cuál es la cantidad mayor?

   A) 18 B) 36 C) 12 D) 48 E) 24

9. La edad de A es el doble que la de B y ambas suman 36 años. Halla la edad de A.

   A) 24 años B) 12 años C) 18 años
   D) 48 años E) 6 años

10. En la tabla:

	–8	b
x	–2	a
y	2a	–b

La suma de los 3 términos en cada fila, columna y diagonal es la misma. Calcula: $x - y$

UNI 2008-I

A) $a - b$ B) $b - a$ C) $a + b$ D) 4 E) 0

NIVEL 2

11. A 10 parejas de jóvenes le van a entregar 2 canarios por pareja. En el momento de la entrega se escapan algunos canarios y luego se ordenan traer tantos como la mitad de los que quedan, más dos canarios, para así cumplir con la entrega. ¿Cuántos canarios se escaparon?

A) 8 B) 6 C) 4 D) 10 E) 12

12. Dos graneros contienen un total de 745 kilogramos de arroz. Si se saca 1/5 del contenido del primero y 3/7 del segundo, quedan 20 kg más en el primero que en el segundo. ¿Cuántos kilogramos hay en el primer granero?

A) 360 kg B) 320 kg C) 325 kg
D) 340 kg E) 350 kg

13. ¿Qué fecha será, en un año bisiesto, cuando la séptima parte del número de días transcurridos sea igual a la quinta parte de los días que faltan transcurrir, disminuido en 6?

A) 11 de julio B) 13 de julio
C) 15 de julio D) 16 de julio
E) 14 de julio

14. Un alambre se divide en 5 partes iguales, con 4 partes se forma un cuadrado y con la última un triángulo equilátero, resultando el área del cuadrado numéricamente igual a un lado del triángulo. ¿Cuál es la longitud del alambre?

A) 5/9 B) 15/7 C) 5/3 D) 10/3 E) 10/7

15. En un vuelo de aves se observan tantas alas de gorriones como cabezas de gaviota. Una vez posadas se observan 90 patas. ¿Cuántas aves quedan en tierra al volar nuevamente 2 docenas de aves?

A) 23 B) 21 C) 20 D) 24 E) 25

16. Pagué 87 soles por un libro, un traje y un sombrero. El sombrero costó S/.5 más que el libro y S/.20 menos que el traje. ¿Cuánto pagué por el traje?

A) S/.44 B) S/.64 C) S/.50
D) S/.40 E) S/.56

17. El largo de un buque, que es 800 cm, excede en 744 cm a los 8/9 del ancho. Halla la medida del ancho del buque.

A) 63 cm B) 70 cm C) 80 cm
D) 65 cm E) 62 cm

18. Un cajero automático debe entregar 740 soles, empleando billetes de las siguientes denominaciones: 100; 50, 20 y 10 soles. Si debe emplear todas las denominaciones y el menor número de billetes, ¿cuántos billetes entregará el cajero?

UNI 2003-II

A) 14 B) 15 C) 11 D) 13 E) 12

19. José solo gasta en pagar pasajes cuando va a la academia porque su padre lo recoge. Cuando toma el bus en la esquina de su casa, gasta S/.1,20; pero si camina cinco cuadras gasta solo S/.0,80. Si después de 30 días, gastó en pasajes S/.28, ¿cuántas cuadras caminó para ahorrar en sus pasajes?

UNI 2003-II

A) 100 B) 20 C) 80 D) 60 E) 40

NIVEL 3

20. En una caja vacía que pesa 150 gramos, depositamos 10 esferas rojas, 15 esferas blancas y 12 esferas azules. Se sabe que 1 esfera blanca pesa 2 gramos más que una roja, 1 esfera azul 4 gramos más que una roja y 1 esfera blanca tiene un peso igual a los 4/5 del peso de una azul. Además las esferas del mismo color tienen igual peso. Halla el peso total, en gramos, de la caja con esferas en su interior.

A) 450 g B) 280 g C) 250 g
D) 300 g E) 225g

21. El día de mi cumpleaños nos reunimos 65 personas. Después de la reunión me di cuenta que el primer amigo bailó con una amiga, el segundo con tres, el tercero con seis, el cuarto con diez y así sucesivamente, hasta que yo fui el último y bailé con todas. Entonces son ciertas:



I. Son 10 los varones.
II. Son 45 las mujeres.
III. El sexto amigo bailó con 21 chicas.

A) Solo II B) I y II C) I y III
D) II y III E) Todas

22. Un matrimonio que tiene dos hijos acordó pesarse y lo hicieron del modo siguiente: se pesaron los padres y resultó 126 kg, después el papá con el hijo mayor y resultó 106 kg, y por último la mamá con el hijo menor y resultó 83 kg. Se sabe que el hijo mayor pesa 9 kg más que el menor. Determina cuánto pesa el hijo mayor.

A) 35 kg B) 38 kg C) 32 kg D) 30 kg E) 36 kg

23. En un salón de clases, si los alumnos se sientan de 6 en 6 quedarían 2 carpetas vacías; en cambio si se sientan de 4 en 4 se quedarían de pie 12 alumnos. ¿Cuántos alumnos son en total?

A) 56 B) 60 C) 61 D) 62 E) 68

24. Un granjero cría patos, gallinas y conejos. La cantidad de gallinas duplica al número de patos, así como los conejos son tantos como los patos y gallinas juntos. Si el granjero vende 5 patos y 10 gallinas, el número de conejos es el doble del número de patos y gallinas que quedan. ¿Cuántos conejos tiene el granjero?

UNI 2003-II

A) 40 B) 25 C) 30
D) 35 E) 20

25. Si: $\begin{array}{l|l} x & y \\ \cline{2-2} 9 & 2 \end{array}$, además $\begin{array}{l|l} (x-y) & x-y \\ \cline{2-2} 9 & 2 \end{array}$

Halla x.

A) 45 B) 67 C) 71
D) 79 E) 83

26. Los estudiantes de una clase de baile se disponen en círculo igualmente espaciados y luego se les asigna números consecutivos. El estudiante número 20 se encuentra diametralmente opuesto al estudiante número 53. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase de baile y quién se encuentra diametralmente opuesto al estudiante número 45?

A) 40 y 10 B) 66 y 12 C) 45 y 18
D) 67 y 13 E) 80 y 20

27. Se tienen 3 montones de clavos donde las cantidades son proporcionales a 6, 7 y 11. Si del montón que tiene más clavos se sacan 12 para redistribuir entre los demás, al final se tendrían los tres montones con igual número de clavos. ¿Cuántos clavos hay en total?

A) 74 B) 84 C) 90
D) 94 E) 96

28. A un empleado le prometen por un año de trabajo 8000 soles, un televisor y un equipo de sonido; pero lo despiden a los 10 meses recibiendo 6000 soles más los artefactos. Si se le hubiera despedido, a los 8 meses habría recibido 5800 soles y el equipo de sonido. ¿Cuál es el precio del televisor?

A) S/.1500 B) S/.350 C) S/.1800
D) S/.1250 E) S/.1100

Claves

NIVEL 1	8. D	15. B	22. E
1. C	9. A	16. A	23. B
2. D	10. B	17. A	24. C
3. C	NIVEL 2	18. C	25. A
4. B	11. A	19. A	26. B
5. B	12. C	NIVEL 3	27. E
6. A	13. E	20. A	28. C
7. C	14. C	21. C	

Edades

Ejemplo:
Jenny le dice a Jason: "Actualmente yo soy mayor que tú en 20 años. ¿Cuál sería nuestra diferencia de edades si tú hubieras nacido 10 años antes y yo 10 años después?"

Resolución:
Si Jenny hubiera nacido 10 años después, tendría 10 años menos y Jason hubiera nacido 10 años antes, tendría 10 años más, esto quiere que la diferencia se reduciría en 20 años.
Por lo tanto ambos tendrían la misma edad.

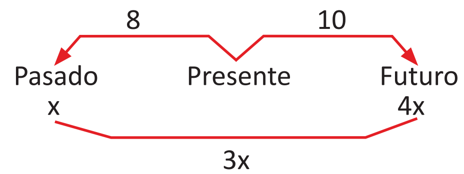
CLASIFICACIÓN

Para facilitar la resolución de los ejercicios los clasificaremos según el número de personas que intervengan.

Con una sola persona

Ejemplo:
Dentro de 10 años tendré en edad el cuádruple de lo que tenía hace 8 años. ¿Cuál será mi edad dentro de 15 años?

Resolución:



Se observa que el tiempo transcurrido desde el pasado hasta el futuro es:

$$3x = 18 \Rightarrow x = 6$$

Luego: Edad (Pasado) $x = 6$
Edad (Presente) $6 + 8 = 14$

$\therefore$ Edad (dentro de 15 años) $= 14 + 15 = 29$ años

Con varias personas

Ejemplo:
Hace 4 años la edad de Ana era el cuádruple de la edad de Juan, pero dentro de 5 años será el triple. Halla la suma de las edades actuales.

Resolución:

	Hace 4 años	Presente	Dentro de 5 años
Ana	$4x$	$4x + 4$	$4x + 9$
Juan	x	$x + 4$	$x + 9$

De la última condición: $4x + 9 = 3(x + 9)$

$$4x + 9 = 3x + 27 \Rightarrow x = 18$$

Edades actuales: Ana $= 4(18) + 4 = 76$
Juan $= 18 + 4 = 22$

$\therefore$ Suma de edades actuales: $76 + 22 = 98$ años

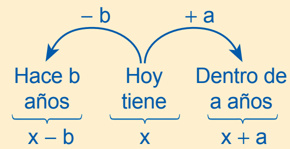
Recuerda

- Si una persona hubiera nacido n años después tendría n años menos.
- Si una persona hubiera nacido m años antes tendría m años más.



Observación

Sea "x" la edad actual de una persona, entonces dentro de "a" años tendrá x + a años y hace "b" años tenía x – b años.





Importante

Para toda persona, se cumple que la relación de su edad actual, su año de nacimiento y el año actual es la siguiente:

Año Nac. + Edad Actual = Año Actual

Siempre y cuando la persona ya cumplió años.

Año Nac. + Edad Actual = Año Actual – 1

Siempre y cuando la persona todavía no cumple años.

Problemas resueltos

1 Las edades de 3 jóvenes están en progresión aritmética creciente cuya suma es 39. Si la suma de sus cuadrados es 515; la edad del menor es:

Resolución:

Sean las edades: $x - r, x, x + r$

Según el enunciado: $x - r + x + x + r = 39$

$$3x = 39 \Rightarrow x = 13$$

También:

$$(x - r)^2 + x^2 + (x + r)^2 = 515$$
$$(13 - r)^2 + 13^2 + (13 + r)^2 = 515$$
$$169 - 26r + r^2 + 169 + 169 + 26r + r^2 = 515$$
$$2r^2 = 8$$
$$r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

$\therefore$ Edad del menor es: $13 - 2 = 11$ años

2 Mary le dice a Jany: "La suma de nuestras edades es 46 años y tu edad es el triple de la edad que tenías cuando yo tenía el triple de la edad que tuviste cuando yo nací". ¿Qué edad tiene Jany?

Resolución:

De los datos:

	Tuviste	Tenías	Tienes
Mary	0	3y	2x + 3y
Jany	y	x	3x

Suma 46

Se completa por suma en aspa.

Aplicando suma en aspa: $x = 4y$

Por dato: $(2x + 3y) + 3x = 46$

$$3y + 5x = 46$$
$$3y + 5(4y) = 46$$
$$23y = 46$$

$\Rightarrow y = 2 \wedge x = 8$

$\therefore$ Jany tiene: $3(8) = 24$ años

3 En 1976 la edad de Diana coincidía con la suma de las cifras del año de su nacimiento. Calcula su edad en el 2015.

Resolución:

Según los datos, en 1976:

Año de Nacimiento: $\overline{19ab}$

Edad actual: $1 + 9 + a + b$

Sabemos que:

Año de nacimiento + Edad actual = Año actual

En el problema: $\overline{19ab} + (1 + 9 + a + b) = 1976$

$$1900 + 10a + b + 10 + a + b = 1976$$
$$11a + 2b = 66$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$6 \quad 0$$

Luego: año de nacimiento es $\overline{19ab} = 1960$

$\therefore$ En el 2015 tendrá: $2015 - 1960 = 55$ años

4 Andy, un niño muy inquieto, observa que cuando su padre tenía 41 años, él tenía 14 años, es decir, el mismo número pero con las cifras invertidas. Si Andy vivió 100 años, ¿cuántas veces más volvió a ocurrir este caso?

Resolución:

Según el enunciado:

La diferencia de edades es: $41 - 14 = 27$ años

Edad del padre: $\overline{ab}$

Edad de Andy: $\overline{ba}$

Por dato del problema: $\overline{ab} - \overline{ba} = 27$

$$10a + b - (10b + a) = 27$$
$$9a - 9b = 27$$
$$a - b = 3$$

a	b
4	1
5	2
6	3
7	4
8	5
9	6

5 veces más

$\therefore$ Esto ocurrió 5 veces más.

5 El año en que nació Evelyn representa el cuadrado de la edad que tendrá en el 2070. ¿Cuántos años tuvo en el 2030?

Resolución:

De los datos:

Año de nacimiento + Edad actual = Año actual

$$E^2 + E = 2070$$
$$E(E + 1) = 45 \times 46$$
$$E = 45$$

Luego Evelyn nació en el 2025.

$\therefore$ En el 2030 tuvo: 2030 – 2025 = 5 años

6 Andy y Ángela tienen edades cuya suma es 5 veces más que la suma de las edades de sus "n" hijos. Hace 2 años esta suma era 10 veces la suma de las edades de sus hijos y dentro de 6 años será 2 veces más que la suma de las edades de sus hijos. Halla "n".

Resolución:

De los datos:

	Hace 2 años	Edad actual	Dentro de 6 años
Suma de las edades de los esposos	6S – 2(2)	6S	6S + 2(6)
Suma de las edades de los "n" hijos	S – 2(n)	S	S + 6(n)

Del enunciado:

$$6S - 2(2) = 10(S - 2n)$$
$$6S - 4 = 10S - 20n$$
$$20n - 4 = 4S \Rightarrow S = 5n - 1 \quad ... (I)$$

También:

$$6S + 2(6) = 3(S + 6n)$$
$$6S + 12 = 3S + 18n$$
$$3S = 18n - 12 \;\Rightarrow\; S = 6n - 4 \quad ... (II)$$

(I) = (II): $5n - 1 = 6n - 4$

$$n = 3$$

$\therefore$ El valor de "n" es 3.

7 Hace "n–S" años la edad de Carmen era "n" veces la edad de María. Dentro de "n+S" años solamente sera "S" veces la edad de María. ¿Qué edad tuvo María hace "n–S" años?

Resolución:

Según los datos:

	Hace (n – S) años	Edad actual	Dentro de (n + S) años
Carmen	nx	nx + (n – S)	nx + (n – S) + (n + S)
María	x	x + (n – S)	x + (n – S) + (n + S)

Por condición del problema:

$$nx + (n - S) + (n + S) = S(x + (n - S) + (n + S))$$
$$nx + 2n = Sx + 2nS$$
$$(n - S)x = 2n(S - 1)$$
$$x = \frac{2n(S-1)}{n-S}$$

$\therefore$ La edad de María hace (n – S) años era:

$$\frac{2n(S-1)}{n-S}$$

8 La edad de Salvador está dada por la cantidad de divisores de 2520 y la edad de Pascual por la cantidad de divisores de 720. ¿Dentro de cuántos años la relación de sus edades será 2/3?

Resolución:

Nota: Sea $N = a^x \,.\, b^y \,.\, c^z$, la descomposición canónica de N:

Se cumple que: $CD_N = (x + 1)(y + 1)(z + 1)$

En el problema:

Edad de Salvador = CD_{2520}, entonces:

$2520 = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 7$

$CD_{2520} = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 48$

Edad de Pascual = CD_{720}, entonces:

$720 = 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5^1$

$CD_{720} = (4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 30$

Luego, dentro de "x" años se cumple que:

$$\frac{30 + x}{48 + x} = \frac{2}{3}$$
$$90 + 3x = 96 + 2x$$
$$x = 6$$

$\therefore$ Dentro de 6 años se cumplirá dicha relación.

9 Camila nació 6 años antes que Valentina. Hace "2n" años sus edades eran como 7 es a 4 y hace "2m" años eran como 2 es a 1. Dentro de "m" años serán como 5 es a 4. ¿En qué relación estarán las edades dentro de 2(m + n) años?

Resolución:

De los datos:

	Hace "2m" años	Hace "2n" años	Edad actual	Dentro de "m" años
Camila	$(x+6)-2m$	$(x+6)-2n$	$x+6$	$(x+6)+m$
Valentina	$x-2m$	$x-2n$	x	$x+m$

Según enunciado:

$$\frac{x+6-2m}{x-2m}=\frac{2}{1}$$

$$x+6-2m=2x-4m$$

$$x=2m+6 \quad \text{... (I)}$$

Luego: $\dfrac{x+6-2n}{x-2n}=\dfrac{7}{4}$

$$4x+24-8n=7x-14n$$

$$6n+24=3x \Rightarrow x=2n+8 \quad \text{... (II)}$$

También: $\dfrac{x+6+m}{x+m}=\dfrac{5}{4}$

$$4x+24+4m=5x+5m$$

$$x=24-m \quad \text{... (III)}$$

(I) = (III): $2m+6=24-m$

$$3m=18 \Rightarrow m=6 \Rightarrow x=18;\ n=5$$

Entonces las edades de Camila y Valentina son 24 y 18.

Dentro de 2(m + n) años será:

Camila: $24+2(6+5)=46$

Valentina: $18+2(6+5)=40$

$\therefore$ La relación será: $\dfrac{46}{40}=\dfrac{23}{20}$

10 Las edades de Aldolfo, Julio y José están en la relación de 3, 5 y 4; luego de 12 años dichas edades estarán en la relación de (x–2), 13 y x. ¿Dentro de cuántos años estrán en la relación 23, 31 y 27?

Resolución:

De los datos:

	Edad actual	Dentro de 12 años
Adolfo	3k	3k + 12
Julio	5k	5k + 12
José	4k	4k + 12

Según el enunciado:

$$\frac{3k+12}{x-2}=\frac{5k+12}{13}=\frac{4k+12}{x}$$

Por propiedad:

$$\frac{5k+12}{13}=\frac{(4k+12)-(3k+12)}{x-(x-2)}$$

$$\frac{5k+12}{13}=\frac{k}{2} \Rightarrow k=8$$

Luego las edades de Adolfo, Julio y José son 24; 40 y 32 años respectivamente.

Sea "n" los años que transcurren.

	Edades actuales	Dentro de "n" años
Adolfo	24	24 + n
Julio	40	40 + n
José	32	32 + n

Entonces:

$$\frac{24+n}{23}=\frac{40+n}{31}=\frac{32+n}{27}$$

Por propiedad:

$$\frac{24+n}{23}=\frac{(40+n)-(32+n)}{4}$$

$$\frac{24+n}{23}=2 \Rightarrow n=22$$

$\therefore$ Dentro de 22 años sus edades estarán en la relación de 23; 31 y 27.

Actividades de razonamiento

1. Un alumno de la academia nació en $\overline{19ba}$ y en 1980 tuvo (a + b) años. ¿En qué año cumplió (2a + b) años?

A) 1987 B) 1967 C) 1985 D) 1990 E) 1980

2. Jhon le dice a Elvis: "Tengo el triple de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la mitad de la edad que tienes y cuando tengas la edad que tengo yo, yo tendré el doble de la edad que tú tenías hace 12 años". ¿Cuánto suman sus edades actuales?

A) 48 años B) 36 años C) 32 años
D) 40 años E) 68 años

3. En 1987 Emilio tuvo tantos años como el doble de las 2 últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Cuál es la suma de las cifras del año de su nacimiento?

A) 25 B) 18 C) 15 D) 13 E) 21

4. En 1980 Carlos se percató que su edad coincidía con las 2 últimas cifras del año de su nacimiento. Al comentárselo a su abuelito, este sorprendido le contestó que con él ocurría lo mismo. Calcula la diferencia de sus edades hace x años.

A) 45 años B) 30 años C) 50 años
D) 20 años E) 40 años

5. Las edades de tres hermanos hace 2 años, estaban en la misma relación que 3; 4 y 5. Si dentro de 2 años serán como 5; 6, 7, ¿qué edad tiene el menor?

A) 6 años B) 8 años C) 10 años
D) 14 años E) 12 años

6. ¿Cuántos años tiene una persona, sabiendo que la raíz cuadrada de la edad que tenía hace 5 años más la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años suman 11?

A) 28 años B) 34 años C) 32 años
D) 30 años E) 36 años

7. Luis nació en $\overline{19ab}$ y en $\overline{19ba}$ tenía (a + 3b) años. ¿Qué año será cuando cumpla (5a + 3b) años?

A) 1965 B) 1953 C) 1975
D) 1949 E) 1935

8. Un niño tiene "2b" años y su padre tiene "m" veces dicha edad. ¿Cuántas veces la edad del niño era la edad de su padre, hace b años?

A) 2m veces B) (m + 1) veces C) (2m – 1) veces
D) (m – 1) veces E) (2m + 1) veces

9. Rosa tenía en 1978 la mitad de años de los que tenía en 1992. ¿Cuántos años tendrá en 1999?

A) 28 años B) 40 años C) 22 años
D) 30 años E) 35 años

10. La edad actual de una persona es el doble de la otra persona; hace 7 años la suma de sus edades era igual al promedio de sus edades actuales, disminuido en 0,5. Halla la edad del menor.

A) 12 años B) 9 años C) 20 años
D) 27 años E) 18 años

11. Anita le dice a José: "Dentro de 10 años yo tendré el doble de la edad que tú tendrás". Él responde: "sí, pero hace 5 años tu edad era el quíntuple de la edad que yo tenía". Si él nació en 1992, ¿en qué año nació Anita?

A) 1972 B) 1980 C) 1965
D) 1968 E) 1976

12. Una persona nacida en la segunda mitad del siglo XX, tendrá "a" años en el año a^2. ¿Cuántos años tenía dicha persona en 1995?

A) 16 años B) 10 años C) 15 años
D) 14 años E) 12 años

13. Hace "m – a" años la edad de "A" era "m" veces la edad de "B". Dentro de "m + a" años solamente será "a" veces la edad de "B", en consecuencia la edad que tenía "B" hace "(m – a)" años era igual a:

A) $m(a+1)/(m-a)$ B) $(a-1)/(m-a)$
C) $2m(a+1)/a$ D) $2m(a-1)/(m-a)$
E) $2a(m-1)/(m-a)$

14. Mi edad es mayor en 15 que el triple de tu edad, y menor en 16 que el cuadrado de tu edad del proximo año. ¿Cuántos años tenemos entre tú y yo?

A) 339 años B) 35 años C) 32 años
D) 34 años E) 39 años

Claves

1. A	5. B	9. E	13. D
2. E	6. D	10. B	14. E
3. E	7. A	11. A	
4. C	8. C	12. C	

Reto



Hace "a + b + c" años tu edad era "a + b" veces la mía. Cuando tú tengas "b + c" veces mi edad, habrán transcurrido a partir de hoy "c + b – a" años. Entonces yo tenía en años:

Rpta.: $2\left(\frac{b+c}{b-c}\right)(b+c-1)$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Andrea tuvo su primer hijo a los 30 años, 2 años después tuvo el segundo y 3 años después tuvo el tercero. Si el esposo de Andrea es mayor que ella en 4 años y, además, actualmente la suma de las edades de los cinco es 102 años, ¿cuál es la edad actual del esposo?

   A) 39 años B) 43 años C) 50 años
   D) 40 años E) 45 años

2. Gigi tenía en 1978 la mitad de años que tenía en 1992. ¿Cuántos años tendrá Gigi en el 2002?

   A) 14 B) 24 C) 38 D) 36 E) 30

3. Cuando tú tengas mi edad, yo tendré lo que tú tendrás cuando yo tenga 35 años. Si cuando naciste, yo tenía 10 años, ¿qué edad tengo?

   A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 20

4. Cuando yo tenía la edad que tú tenías, cuando yo tenía 20 años; tú tenías 10 años. ¿Cuántos años tenía cuando tú tenías 12 años?

   A) 5 B) 7 C) 10 D) 17 E) 12

5. Si yo tuviera 5 años más, mi edad y tu edad estarían en la relación de 3 a 4. En cambio, si tú tuvieras 8 años más, la relación sería de 1 a 2. ¿Cuántos años tengo?

   A) 22 B) 27 C) 36 D) 45 E) 48

6. Dentro de 5 años, yo tendré 5 veces la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tendrás en ese entonces. ¿Qué edad tienes, si es la mitad de la que tengo?

   A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

7. Rubén y Marcos comentan: "Yo soy mayor que tú y en 1977 mi edad era 3 veces mayor que la tuya". Si en el año 2001, entre los dos tendrán 63 años, ¿cuál será la diferencia de sus edades en el próximo año?



   A) 6 B) 20 C) 8 D) 9 E) 19

8. Las edades actuales de Pepe y Juan suman 91 años. Pepe es ahora el doble de viejo de lo que era Juan cuando Pepe tenía la edad que ahora tiene Juan. ¿Cuáles son las edades de Juan y Pepe?

   A) 19 y 72 B) 39 y 52 C) 41 y 50
   D) 43 y 48 E) 27 y 64

9. Dentro de 2 años, las edades de Jaime y Lilian sumarán 40 años. Cuando Lilian nació, Jaime tenía 2 años. ¿Cuál es la edad de Lilian?

   A) 16 años B) 17 años C) 15 años
   D) 18 años E) 20 años

10. Ricardo dice: “Si al año en que cumplí 18 años le sumas el año en que cumplí 20 años y luego de restar el año en que nací con el año actual, obtendrás como resultado 13. ¿Cuál es la edad de Ricardo si todavía no cumple años?

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

NIVEL 2

11. La edad que tenía hace n años es a lo que tendré dentro de n años como 2 es a 9. ¿Qué edad tendré en 2n años?

A) 24n/7 B) 25n/7 C) 23n/7
D) 22n/7 E) 36n/7

12. A José en el año 1990, se le preguntó por su edad y contestó: “Tengo en años la mitad del número que forman las dos últimas cifras del año de mi nacimiento”. Halla la suma de cifras de la edad de José.

A) 2 B) 3 C) 4 D)5 E) 6

13. Las edades de 3 hermanos suman 30 años. Si hace 4 años, dichas edades eran 3 números pares consecutivos, ¿cuál será la edad del mayor dentro de 30 años?



A) 39 B) 44 C) 43 D) 42 E) 38

14. Una persona de 40 años le preguntó a Carlos y Juan sobre sus edades, a lo que Carlos contestó: “Cuando yo tenía un año menos de la edad que tiene él, él tenía cinco años menos de la edad que tengo, pero cuando él tenga el doble de la edad que yo tengo, entonces la suma de nuestras edades excederá en diez al doble de la edad que usted tiene. ¿Qué edades tienen Carlos y Juan, respectivamente?

A) 22 y 20 B) 18 y 16 C) 20 y 22
D) 25 y 27 E) 28 y 30

15. Cuando yo tenía la edad que él tiene, tú tenías los 7/9 de la edad que tú tienes ahora; y cuando yo tenga la edad que tú tienes, él tendrá la edad que yo tengo y tú tendrás la edad que él hubiera tenido hace 12 años si él hubiese nacido 42 años antes. ¿Dentro de cuántos años tú tendrás lo que le falta a él actualmente para tener el triple de mi edad?

A) 55 B) 45 C) 35 D) 15 E) 25

16. Cuando tengas la edad que tengo, tendrás lo que él tenía que es el triple de lo que tienes. Si yo tenía en ese entonces 5/7 de lo que él tiene, que es 15 años menos de lo que tendré, cuando tengas lo que yo ya te dije, ¿qué edad tuve yo cuando naciste?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 12 E) 18

17. Tú tienes la edad que yo tenía cuando tú tenías la edad que yo tuve cuando tú tuviste la edad que yo tuve cuando tu edad en ese entonces era la quinta parte de mi edad actual, y nuestras edades sumaban 45 años. ¿Qué edad tenía cuando naciste?

A) 15 B) 20 C) 10 D) 30 E) 45

18. Cuando yo tenía lo que te falta a ti actualmente para tener el triple de mi edad, tú tenías la mitad de la edad que yo tendré, cuando tú tengas lo que me falta a mi actualmente para tener 78 años. Si nuestras edades actuales suman 42 años, ¿cuál será la diferencia de nuestras edades dentro de 40 años, si tú hubieras nacido dos años antes y yo hubiera nacido 3 años después?

A) 18 B) 23 C) 13 D) 19 E) 17

19. Juan nació antes del año 2000. El 25 de agosto del 2001 cumplió tantos años como la suma de los dígitos del año de su nacimiento. Determina el año en que nació.

A) 1981 B) 1985 C) 1983
D) 1977 E) 1972

20. Lucy nació un extraño domingo soleado de invierno en Lima, y cumplió siete años en un domingo gris y lluvioso en Ica. ¿Cuántos años cumplió en 1996?

A) 50 B) 60 C) 90 D) 99 E) 100

NIVEL 3

21. En 1965 una persona tiene $(a \times b)$ años. Si en $\overline{19ab}$ tuvo $(a + b)$ años, ¿qué año nació?

A) 1950 B) 1960 C) 1955
D) 1970 E) 1945

22. Cuando mi abuela se convirtió en una nonagenaria, deseó que en su pastel pusieran el año actual; extrañamente confundieron el orden de todas las velas y el número que se formó fue el año de su nacimiento. ¿En qué año ocurrió esto, si fue en el siglo XX?



A) 1972 B) 1981 C) 1953
D) 1915 E) 1922

23. Recuerdo haber votado por el presidente, en cuyo gobierno naciste. Momentos duros, felizmente he aprendido a no cometer los mismos errores, bueno, si bien es cierto yo soy el doble de viejo que tú, pero aún no soy un cuarentón. ¿Qué edad tengo?

A) 30 años B) 32 años C) 34 años
D) 36 años E) 38 años

24. Las edades de un padre y su hijo son dos números tales que su producto es 8 veces su MCM y su suma es 6 veces su MCD. ¿Cuál fue la edad del padre cuando nació su hijo?

A) 24 B) 15 C) 32 D) 19 E) 17

(25) La suma de las edades de un hombre y su esposa es seis veces la suma de las edades de sus hijos. Hace 2 años esta suma era 10 veces la de los hijos y dentro de 6 años será 3 veces la de los hijos. ¿Cuántos hijos tienen?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(26) Si se escribe hoy la edad de Alejandro y a continuación la edad de Carlos, se obtiene un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si se hiciera lo mismo dentro de 11 años, se tendría de nuevo un cuadrado perfecto de cuatro cifras. Halla las edades actuales de Alejandro y Carlos.

A) 20 y 25 B) 29 y 36 C) 19 y 36
D) 10 y 24 E) 14 y 44

(27) Si tomamos la edad que tendré dentro de "algunos años" tantas veces como años tendré y restémosle los años que tuve hace los mismos "algunos años" tantas veces como años tuve y obtendremos 24 veces mi edad actual. ¿Cuántos años más son los que tendré respecto a los que tuve?

A) 7 B) 6 C) 10 D) 12 E) 32

(28) Hace 6 años yo tenía la mitad de edad que tendré dentro de un número de años equivalente a la tercera parte de mi edad actual. ¿Dentro de cuántos años tendré el triple de la edad que tengo actualmente?

UNI 2006-II

A) 30 B) 36 C) 32 D) 28 E) 25

(29) La suma de las edades de Laura, su papá y su mamá es 66, además la edad de su mamá es igual a la mitad de la edad de su papá, más dos años y la edad de su mamá es el triple de la edad de Carlitos. ¿Cuál es la edad de su papá?

A) 50 B) 40 C) 30 D) 38 E) 21

(30) En 1999 en su cumpleaños, un padre y un hijo utilizaban dos velas con forma de número para representar la edad que cumplen. Ambos utilizan las mismas dos velas, solamente que invierten el orden de colocación sobre la torta para indicar su edad. Curiosamente, la edad del padre está representada con las dos cifras finales del año de nacimiento del hijo y la edad del hijo coincide con las dos cifras finales del año de nacimiento del padre. Sabiendo que la diferencia de edades entre ellos es 27 años, ¿qué edad cumple cada uno?

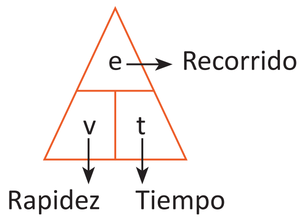
A) 27 y 72 B) 18 y 81 C) 36 y 63
D) 91 y 19 E) 25 y 52

Claves

NIVEL 1	9. B	17. A	25. C
1. B	10. D	18. B	26. A
2. C	**NIVEL 2**	19. D	27. D
3. A	11. B	20. E	28. B
4. D	12. B	**NIVEL 3**	29. D
5. A	13. D	21. E	30. C
6. A	14. A	22. B	
7. D	15. C	23. E	
8. B	16. D	24. C	

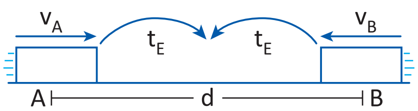
Móviles

En general:



$e = v \times t$ $v = \frac{e}{t}$ $t = \frac{e}{v}$

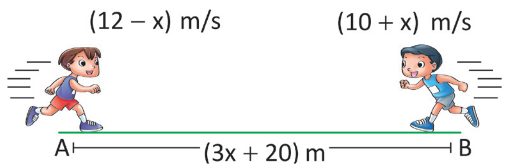
TIEMPO DE ENCUENTRO (t_E)



$$t_E = \frac{d}{v_A + v_B}$$

Ejemplo:
Dos atletas están separados (3x + 20) m uno del otro; si parten al mismo instante, con una rapidez de (12 – x) m/s y (10 + x) m/s, respectivamente, se encontrarán luego de 2 s, halla "x".

Resolución:



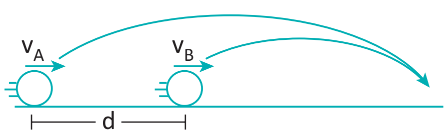
$v_A = (12 - x)$ m/s
$v_B = (10 + x)$ m/s
$d = (3x + 20)$ m

$t_E = 2$ s

Reemplazando:

$$2 = \frac{3x + 20}{(12 - x) + (10 + x)} \Rightarrow 44 = 3x + 20 \Rightarrow 24 = 3x \quad \therefore x = 8$$

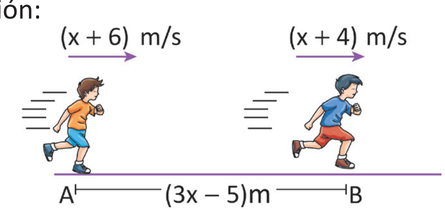
TIEMPO DE ALCANCE (t_A)



$$T_A = \frac{d}{v_A - v_B}$$

Ejemplo:
Gonzalo debe alcanzar a Silvio dentro de "x" s, si la rapidez de ambos es de (6 + x) m/s y (x + 4) m/s respectivamente. Halla "x", sabiendo que están separados (3x – 5) m.

Resolución:



$v_A = (x + 6)$ m/s
$v_B = (x + 4)$ m/s
$d = (3x - 5)$ m

$t_A = x$

Reemplazando: $x = \frac{3x - 5}{(x + 6) - (x + 4)} \Rightarrow 2x = 3x - 5 \quad \therefore x = 5$

Nota

Ejemplo:
Un ciclista corre, con una rapidez de 15 m/s. ¿Cuál será su rapidez en km/h?

$15\frac{m}{s} \times \frac{1km}{1000m} \times \frac{3600s}{1h}$

$= 15 \times \frac{18}{5}\frac{km}{h}$

$= 54\frac{km}{h}$

Luego:

$v\left(\frac{km}{h}\right) <> \frac{18}{5} v\left(\frac{m}{s}\right)$

Observación

En la relación:

$$t_E = \frac{d}{v_A + v_B}$$

t_E: tiempo de encuentro
d: distancia inicial de separación
v_A: velocidad del móvil que parte de "A".
v_B: velocidad del móvil que parte de "B".



Recuerda

En la relación:

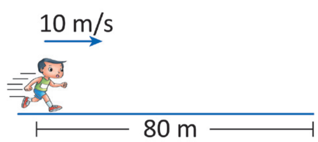
$$t_A = \frac{d}{v_A - v_B}$$

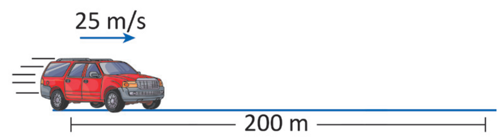
t_A: tiempo de alcance
d: distancia inicial de separación
v_A: velocidad del móvil que parte de "A".
v_B: velocidad del móvil que parte de "B".

Relación entre la rapidez y el espacio recorrido de dos móviles para un mismo tiempo

Ejemplo:
Un atleta está corriendo a razón de 10 m/s durante 8 s; simultáneamente, en otra pista paralela, un auto avanza a razón de 25 m/s el mismo tiempo que el atleta.

Resolución:



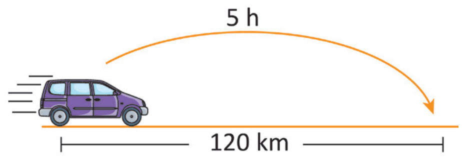


$$\therefore \frac{v_{atleta}}{v_{auto}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}; \quad \frac{e_{atleta}}{e_{auto}} = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$$

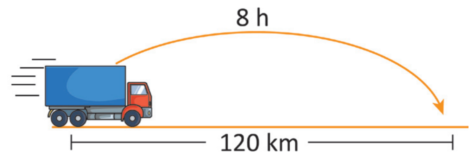
Relación entre la rapidez y el tiempo para espacios iguales

Ejemplo:
Un auto va a recorrer 120 km en 5 h; simultáneamente, en otra pista paralela, un bus recorre durante 8 h la misma distancia.

Resolución:



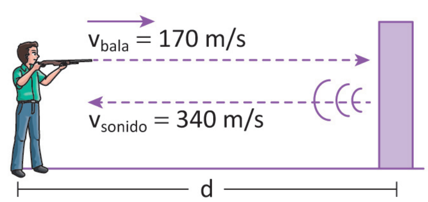
$$\Rightarrow v_{auto} = \frac{120}{5} = 24 \text{ km/h}$$



$$\Rightarrow v_{bus} = \frac{120}{8} = 15 \text{ km/h}$$

$$\therefore \frac{v_{auto}}{v_{bus}} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}; \quad \frac{t_{auto}}{t_{bus}} = \frac{5}{8}$$

Ejemplo:
Una persona se encuentra delante de una pared, efectúa un disparo y luego de 4,5 s escucha el impacto. Pero si hubiera estado 340 m más cerca de la pared, ¿al cabo de qué tiempo escucharía el impacto? (v_{sonido} = 340 m/s; v_{bola} = 170 m/s)



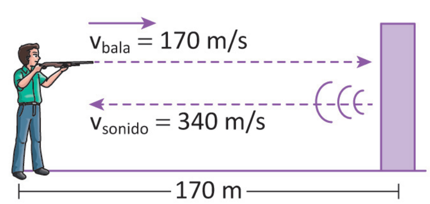
$$t_{bala} + t_{sonido} = 4{,}5$$

$$\frac{d}{170} + \frac{d}{340} = 4{,}5$$

$$\frac{d}{170}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{45}{10}$$

$$\frac{d}{170} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$d = 510 \text{ m}$$



$$t_{total} = t_{bala} + t_{sonido}$$

$$= \frac{170}{170} + \frac{170}{340}$$

$$\therefore t_{total} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5 \text{ s}$$

Importante

Si la rapidez de dos móviles están en la relación de "a" a "b" y el movimiento se realiza durante el mismo tiempo para ambos, (el tiempo es constante); entonces la relación de distancias recorridas será como "a" es a "b".





Atención

	Móvil 1	Móvil 2
Rapidez	v_1	v_2
Tiempo	t_1	t_2
Distancia	d	d

Relación de rapidez del 1.° al 2.°:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a}{b}$$

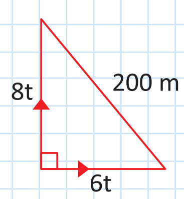
Relación de tiempo del 1.° al 2.°:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{a}{b}$$

Problemas resueltos

1 Dos móviles parten de un mismo punto siguiendo trayectorias rectilíneas perpendiculares entre sí con velocidades de 6 m/s y 8 m/s. Después de qué tiempo ambos móviles estarán separados 200 m.

Resolución:

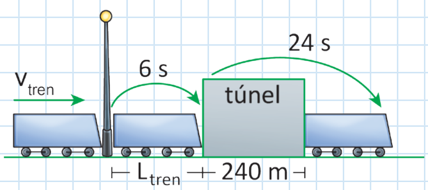


Del gráfico:

$$(8t)^2 + (6t)^2 = 200^2$$
$$64t^2 + 36t^2 = 40\,000$$
$$100t^2 = 40\,000$$
$$t^2 = 400$$
$$\therefore\ t = 20 \text{ s}$$

2 Un tren tardó 6 s en pasar por un semáforo y 24 s en atravesar un túnel de 240 m de longitud. ¿Cuánto tardará en cruzar una estación de 160 m de longitud?

Resolución:



Para el semáforo:

$L_{tren} = v_{tren} \times 6$ ...(I)

Para el túnel

$L_{tren} + 240 = v_{tren} \times 24$ ...(II)

Reemplazamos: (II) en (I):

$$6v_{tren} + 240 = 24v_{tren}$$
$$240 = 18\, v_{tren} \Rightarrow v_{tren} = \frac{40}{3} \text{ m/s}$$

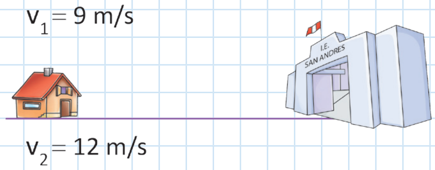
Luego: $L_{tren} = 6 \times v_{tren} = 6 \times \frac{40}{3} = 80$ m

Para la estación:

$$L_{estación} + L_{tren} = \frac{40}{3} \times t$$
$$160 + 80 = \frac{40}{3}t$$
$$240 = \frac{40}{3}t$$
$$\therefore\ t = 18 \text{ s}$$

3 Un alumno quiere calcular la distancia entre su casa y su colegio, observa que caminando a razón de 9 m/s tarda 5 s más que si lo hace a razón de 12 m/s. ¿Cuál es la distancia mencionada?

Resolución:



Como la distancia es constante, entonces la velocidad y el tiempo son inversas:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{9\text{m/s}}{12\text{m/s}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{4k}{3k}$$

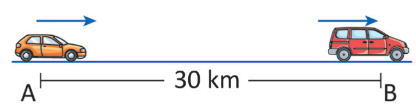
Dato:

La diferencia de tiempos es 5 s.

$$t_1 - t_2 = 4k - 3k = 5$$
$$k = 5$$
$$t_1 = 4k = 4(5) = 20 \text{ s}$$

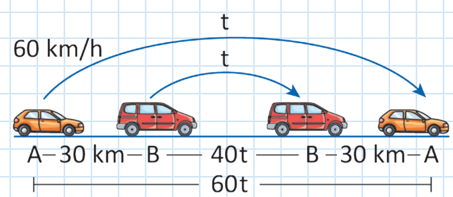
$\therefore$ Luego: $d = v_1 \times t_1 = 9 \text{ m/s} \times 20 \text{ s} = 180$ m

4 En el gráfico, las velocidades de los móviles A y B son 60 km/h y 40 km/h, respectivamente. Calcula después de cuánto tiempo la separación volverá a ser 30 km.



Resolución:

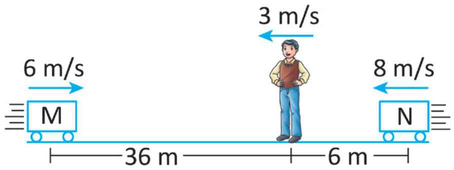
La separación volverá a ser 30 km cuando el móvil "A" adelante al móvil "B" 60 km.



Del gráfico: $30 + 40t + 30 = 60t$

$$60 = 20t$$
$$\therefore\ t = 3 \text{ h}$$

5 A partir del instante mostrado, qué distancia separa a la persona del móvil "N", cuando "M" y "N" se encuentran.



Resolución

Aplicamos: $t_E = \dfrac{d}{v_1 + v_2}$

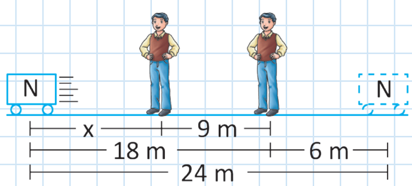
$t_E = \dfrac{36+6}{6+8} = \dfrac{42}{14} = 3\ s$

Para t = 3 s:

$d_N = 8\ m/s \times 3\ s = 24\ m$

$d_{persona} = 3\ m/s \times 3\ s = 9\ m$

Luego se tiene:



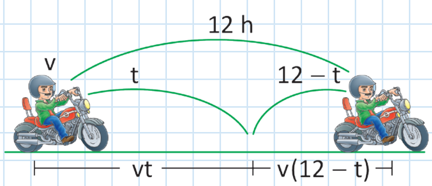
Luego del gráfico:

$x = 18 - 9$

$\therefore\ x = 9\ m$

6 Un motociclista observa que 1/5 de lo que ha recorrido equivale a los 3/5 de lo que falta recorrer. ¿Cuántas horas habrá empleado hasta el momento, si todo el viaje lo hace en 12 h?

Resolución:



$\dfrac{1}{5}$ recorrido $= \dfrac{3}{5}$ falta recorrer

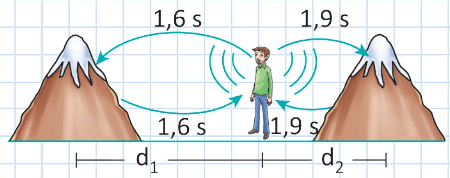
$\dfrac{1}{5}vt = \dfrac{3}{5}v(12-t)$

$\dfrac{vt}{5} = \dfrac{36v}{5} - \dfrac{3}{5}vt$

$\dfrac{4}{5}vt = \dfrac{36v}{5} \qquad \therefore\ t = 9\ h$

7 Una persona ubicada entre dos montañas emite un grito y recibe el primer eco a los 3,2 s y el siguiente a lo 3,8 s. ¿Cuál es la separacíon entre las montañas? ($v_{sonido} = 340\ m/s$)

Resolución:



Como la persona emite un grito, el sonido se desplaza a ambos lados.

Sabemos: $v_{sonido} = 340\ m/s$

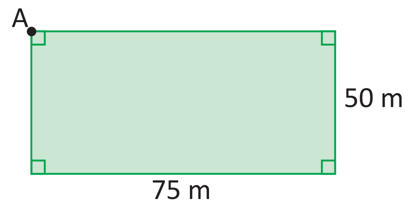
$d_1 = 340(1,6) = 544$

$d_2 = 340(1,9) = 646$

Luego: $d_1 + d_2 = 544 + 646 = 1190$

$\therefore$ La separación entre las montañas es 1190 m.

8 Si dos niños corren por el perímetro de un campo rectangular a partir del punto A, en dirección contraria, se encuentra en 50 s; pero si lo hacen en la misma dirección, el más veloz alcanza al otro en 125 s. Determina la rapidez de ambos.



Resolución:

Sea:

v_A: rapidez del más veloz.

v_B: rapidez del menos veloz.

En dirección contraria se cumple:

$\dfrac{250}{v_A + v_B} = 50 \Rightarrow v_A + v_B = 5 \qquad ...(1)$

En la misma dirección se cumple:

$\dfrac{250}{v_A - v_B} = 125$

$250 = 125(v_A - v_B) \Rightarrow v_A - v_B = 2 \qquad ...(2)$

De (1) y (2):

$v_A = 3,5\ m/s \ \wedge\ v_B = 1,5\ m/s$

Actividades de razonamiento

1. Un tren demora 12 s en cruzar un poste y 20 s en cruzar un túnel de 400 m, ¿cuánto mide el tren?

A) 400 m B) 300 m C) 800 m
D) 600 m E) 700 m

2. Dos trenes pasan en sentidos contrarios, el primero tiene una longitud de 100 m y una velocidad de 72 km/h, el otro tiene una longitud de 110 m y una velocidad de 36 km/h. ¿Cuántos segundos tardarán en cruzarse?

A) 5 s B) 10 s C) 8 s
D) 4 s E) 7 s

3. Una lancha navega en un río a favor de la corriente de modo que avanza a razón de 45 km/h y cuando va en sentido contrario lo hace a 19 km/h. ¿A qué velocidad navegará en una laguna?

A) 30 km/h B) 32 km/h C) 28 km/h
D) 25 km/h E) 20 km/h

4. Un tren tiene que recorrer 840 km en un tiempo determinado. En el punto medio tuvo que detenerse media hora y en el resto del recorrido aumentó su velocidad en 2 km/h.

A) 15 h B) 10 h C) 17 h
D) 21 h E) 5 h

5. Dos automóviles parten al mismo tiempo de un mismo punto en un mismo sentido, con rapideces de 40 km/h y 50 km/h. Después de media hora, del mismo punto y en el mismo sentido, parte un tercer automóvil que alcanza a uno 1,5 h más tarde que al otro. Halla la rapidez del tercer automóvil.

A) 40 km/h B) 72 km/h C) 65 km/h
D) 60 km/h E) 80 km/h

6. Dos móviles A y B disputan una carrera de 800 m. Si A le da a B 200 m de ventaja, llegan al mismo tiempo a la meta; en cambio si le da 80 m de ventaja, le gana por 20 segundos. ¿Cuál es la rapidez de A?

A) 9 m/s B) 8 m/s C) 10 m/s
D) 5 m/s E) 7 m/s

7. La distancia entre 2 puntos es 440 km, un móvil recorre cada hora una distancia igual a la que recorrió la hora anterior, más "a" km. Halla "a" si tardó 11 horas en hacer todo el recorrido (inició el recorrido a 25 km/h).

A) 3 B) 5 C) 2 D) 4 E) 1

8. ¿Cuántas horas emplea un tren que viaja a una velocidad promedio de 40 km/h entre 2 ciudades, para recorrer "a" kilómetros si hace n paradas de "m" minutos cada una?

A) $\frac{a+2mn}{60}$ B) $\frac{3a-2mn}{60}$ C) $\frac{3a+2mn}{120}$
D) $\frac{2a-3m}{60}$ E) $\frac{3a+5mn}{60}$

9. En una carrera participan 3 caballos, A; B y C que deben recorrer 1800 m. El caballo A llega a la meta con una ventaja de 60 m sobre B y 8 segundos antes que C y B luego 2 segundos antes que C. ¿Cuánto tiempo tardó en la carrera el caballo B?

A) 10 m/s B) 17 m/s C) 20 m/s
D) 15 m/s E) 5 m/s

10. Un móvil pasa por A a las 6 a.m. y llega a B a las 4 p.m.; otro móvil pasa por A a las 7 a.m. y llega a B a las 3 p.m. Si la distancia de A a B es $\overline{xyz}$ km, a qué hora se encontraron por el camino?

A) 2:00 p. m. B) 11:00 a. m. C) 10:00 a. m.
D) 3:00 p. m. E) 1:00 p. m.

11. Un ciclista se dirige de una ciudad A a otra B dividiendo su recorrido en tres partes iguales. El primer tramo lo recorre a una rapidez de 60 km/h, el segundo tramo a 30 km/h y el último a 20 km/h. Halla la rapidez media del ciclista.

A) 25 km/h B) 40 km/h C) 45 km/h
D) 30 km/h E) 35 km/h

12. Un auto se dirige de una ciudad A a otra B que dista d metros con una rapidez v, de B regresa con v/2 y finalmente de A emplea v/4 para volver a la ciudad B. Halla el tiempo total de viaje.

A) 3v/d B) 15d/v C) 7d/v
D) 5v/d E) 9d/v

13. Dos móviles parten de un punto y se alejan en direcciones perpendiculares, con velocidades constantes de 40 y 30 m/s. ¿En qué tiempo estarán separados 24 km?

A) 3 min B) 7 min C) 5 min
D) 10 min E) 8 min

14. Un hombre de altura 1,8 m va caminando a razón de 1,1 m/s y pasa frente a un poste de 4 m de altura. Halla la rapidez de crecimiento de la sombra.

A) 4 m/s B) 2 m/s C) 1 m/s
D) 5 m/s E) 3 m/s

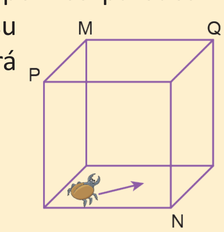
Claves

1. D 2. E 3. B 4. D
5. D 6. B 7. A 8. C
9. A 10. B 11. D 12. C
13. E 14. B

Reto



Un escarabajo se encuentra moviéndose con rapidez constante de 2 cm/s en el interior de una caja cúbica tal como se muestra. Si el escarabajo va desde el vértice P al vértice Q moviéndose por las paredes internas de la caja pasando por su base, ¿qué mínimo tiempo demorará el escarabajo en dicho recorrido? (Considere MN = $10\sqrt{30}$ cm).



Rpta.: $20\sqrt{5}$ s

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Dos móviles salen de un mismo punto y en sentidos contrarios con velocidades de 20 m/s y 30 m/s. ¿En qué tiempo estarán separados 1500 m?

   A) 24 s B) 30 s C) 32 s D) 36 s E) 45 s

2. Dos móviles salen de 2 puntos A y B separados por 180 km y van al encuentro, uno hacia el otro, con velocidades de 4 km/h y 5 km/h. ¿En qué tiempo se encontrarán?

   A) 20 h B) 23 h C) 24 h D) 25 h E) 30 h

3. Un tren tarda 8 segundos en pasar delante de un observador con una velocidad de 54 km/h. Halla la longitud del tren en metros.

   A) 100 m B) 110 m C) 120 m D) 130 m E) 140 m

4. Alberto debe conducir durante 8 horas. Al cabo de dos horas de haber partido, acelera para tratar de llegar 1 hora antes, haciendo 3 km más por hora. ¿Cuál es la longitud del trayecto?

   A) 100 km B) 120 km C) 130 km D) 50 km E) 40 km

5. Dos ciclistas están en 2 puntos A y B, respectivamente y van ambos al encuentro. Cuando se cruzan están a 120 m de B, continúan su recorrido, llegan a los extremos, se vuelven y esta vez se cruzan a 69 m de A. Halla la distancia $\overline{AB}$.

   A) 185 m B) 291 m C) 282 m D) 305 m E) 247 m

6. Un barco se desplaza 5 horas sin interrupción río abajo desde A hacia B. Da vuelta y avanza contra la corriente (con su marcha ordinaria y sin detenerse) durante 7 horas. ¿Cuántas horas necesitará una balsa para desplazarse de la ciudad A a la B siendo llevado por la corriente?

   A) 39 h B) 35 h C) 30 h D) 27 h E) 18 h

7. Carlos se dirige a su centro de labores manejando su auto a una velocidad de 80 km/h, y en el regreso su velocidad es de 20 km/h. Si el viaje duró 10 horas, ¿cuánto tiempo tarda en llegar a su centro de labores?

   A) 8 h B) 5 h C) 3 h D) 4 h E) 2 h

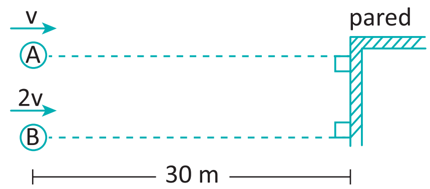
8. Un camión de 20 m marcha con una rapidez de 60 km/h por una carretera paralela a la vía del tren. Si el tren de 80 m de longitud lleva una rapidez de 45 km/h en la misma dirección, ¿qué tiempo tarda el camión en pasar al tren?

   A) 24 s B) 25 s C) 32 s D) 36 s E) 28 s

9. Un tren pasa delante de un poste en 10 s y cruza un puente en 15s. ¿En cuánto tiempo cruzaría un puente si este tuviera el triple de la longitud anterior?

   A) 15 s B) 10 s C) 20 s D) 25 s E) 30 s

10. La gráfica muestra el lanzamiento simultáneo de dos esferas A y B sobre un piso. Determina cuánto recorre A hasta el instante que se cruza con B considere que la esfera B rebota instantáneamente con la misma rapidez. Ambas esferas se mueven con velocidades constantes.



A) 40 m B) 15 m C) 30 m
D) 20 m E) 35 m

NIVEL 2

11. Carmen debe realizar un viaje de 720 km en 6 horas. Si realiza parte del viaje en tren a 50 km/h y el resto en avión a razón de 200 km/h, ¿cuál es la distancia recorrida en tren?

A) 120 km B) 200 km C) 160 km
D) 240 km E) 250 km

12. Un tren pasa por delante de un observador inmóvil y demora 7 segundos. Al pasar por una estación de 360 m demora 22 segundos. Halla su rapidez.

A) 20 m/s B) 22 m/s C) 28 m/s
D) 24 m/s E) 30 m/s

13. Un chofer tiene que hacer un recorrido del pueblo A hasta el pueblo B. Si conduce a una rapidez de 100 km/h, llegaría a las 3 p.m. y si conduce a 150 km/h, llegaría a la 1 p.m. ¿Cuál sería la rapidez a la que debería ir, si debe llegar a las 2 p. m.?



A) 120 km/h B) 150 km/h C) 130 km/h
D) 135 km/h E) 140 km/ h

14. Alfredo tarda 5 minutos en nadar entre 2 islas de un río, ayudado por la corriente. Al regresar nadando contra la corriente, tarda 15 minutos. Halla el tiempo que empleará Alfredo si la rapidez de la corriente fuera cero.

A) 7,5 min B) 8 min C) 9 min
D) 10 min E) 12 min

15. En una velódromo de 800 m de longitud, dos ciclistas se mueven en sentidos opuestos encontrándose cada 16 segundos. Si van en el mismo sentido uno alcanzará al otro cada 80 segundos. Determina la relación de rapideces de dichos ciclistas.

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

16. Un ciclista pasa a las 9 a.m. por un pueblo P a rapidez constante dirigiéndose a Q, dos horas después por el mismo lugar pasó un auto con rapidez constante alcanzando al ciclista a las 12 del mediodía, y luego de llegar a Q y volver inmediatamente encontró al ciclista 3 h después del primer encuentro. ¿A qué hora llegó el ciclista a Q?

A) 6 p. m. B) 8 p. m. C) 10 p. m
D) 11 p. m. E) 5 p. m.

17. Dos móviles están separados 320 km y van en sentidos opuestos. Si dos horas después están separados 80 km, ¿cuánto tiempo después estarán separados 80 km nuevamente?

A) 1 h B) 1 h 20 min C) 1 h 30 min
D) 2 h E) 3 h

18. Un ratoncito sale de un agujero A hacia el agujero B dando saltos de 11 cm. Luego regresa dando saltos de 7 cm, pero habiendo recorrido en total 1,23 m se detiene a descansar. ¿Cuánto le falta aún por recorrer?

A) 48 cm B) 53 cm C) 60 cm
D) 71 cm E) 37 cm

19. Dos trenes de igual longitud que avanzan con 52 m/s y 44 m/s se introducen simultáneamente por un mismo lado de un túnel. Si en el lado opuesto uno de ellos aparece 4 segundos después que el otro, ¿cuál es la longitud del túnel si los trenes miden 50 m?

A) 1094 m B) 1144 m C) 1200 m
D) 1224 m E) 1320 m

20. Se tiene un circuito cerrado de 420 m. Dos corredores parten de un mismo punto en el mismo sentido y al cabo de 30 minutos uno de ellos le saca 2 vueltas de ventaja al otro. Pero si parten en sentido contrario, a los 6 min se cruzan por segunda vez. ¿Cuál es la rapidez del más lento?



A) 39 m/min B) 49 m/min C) 18 m/min
D) 56 m/min E) 78 m/min

NIVEL 3

21. Un tren, una hora después de partir, sufre una avería que lo detiene 1 hora, luego prosigue su marcha con una rapidez que es los 3/5 de la anterior, llegando a su destino con 3 horas de atraso, pero si la avería hubiera tenido lugar 90 km, más adelante, el atraso habría sido de 1 hora y media. Halla la longitud recorrida.

A) 390 km B) 230 km C) 160 km
D) 180 km E) 90 km

22. Sucede una explosión en una isla y en un buque situado a $\overline{mnpq}$ metros, se escucha la explosión a los 4 segundos. Halla: m + n + p + q
(velocidad del sonido: 340 m/s)

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

23. Un auto sale de Lima rumbo a Trujillo distante 720 km, con una rapidez de 80 km/h llevando en su tanque 20 galones de gasolina. Después de 2 horas de viaje, el tanque empieza a perder gasolina a razón de medio galón cada hora. ¿A qué distancia de Lima se encontrará el auto cuando se acabe la gasolina, si el combustible rinde 40 km por galón?

A) 672 km B) 512 km C) 800 km
D) 600 km E) 480 km

24. Un automovilista recorre una distancia de 200 km a velocidad constante de 120 km/h. Si después de cada 10 minutos de manejo descansa 10 minutos, ¿en cuántos minutos llegará a su destino?

UNMSM 2008-I

A) 190 min B) 200 min C) 180 min
D) 100 min E) 130 min

25. Todas las mañanas un gran danés y un salchicha van a un puesto de periódicos, uno por una revista y el otro por un periódico. Una mañana salió el salchicha y luego de 5 min salió el gran danés, el gran danés volvió luego de 20 min, mientras que el salchicha llego 5 min después que el gran danés. Si se sabe que los perros no se detienen en el camino, recogen el artículo e inmediatamente regresan a casa. Entonces, ¿el danés encontró al salchicha antes del puesto de periódicos o después y cuánto tiempo le tomó hacerlo?

A) Después y 5 min B) Antes y 7 min
C) Después y 7 min D) Antes y 5 min
E) En el puesto de periódico

26. Tres móviles A, B y C parten al mismo tiempo de un punto de una pista circular que tiene 240 m de longitud; A se desplaza con una velocidad de 8 m/s, B con una velocidad de 5 m/s y C con una velocidad de 3 m/s. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que los tres móviles realicen el primer encuentro?

A) 3 min B) 240 min C) 4 min
D) 2 min E) 10 min

27. Un móvil pasa por A a las 6 a.m. y llega a B a las 4 p.m. otro móvil pasa por B a las 7 a.m. y llega a A a las 3 p.m., si la distancia de A a B es $\overline{xyx}$ km, ¿a qué hora se encontraron por el camino?

A) 11 a.m. B) 10 a.m. C) 12 m.
D) 9 a.m. E) 1 p.m.

28. Un cuerpo se mueve en línea recta con movimiento uniformemente acelerado. El primer segundo recorre 1 m; el siguiente recorre 1,2 m; el tercer segundo 1,4 m y así sucesivamente. El camino recorrido al cabo de 2 minutos es:

UNMSM 2004-II

A) 1552 m B) 1452 m C) 1548 m
D) 1546 m E) 1550 m

29. Una persona ubicada entre dos montañas emite un grito y recibe el primer eco a los 3 segundos y el siguiente a los 3,6 segundos después de escuchar el primer eco. ¿Cuál es la separación entre las montañas?
(Rapidez del sonido: 340 m/s)

A) 922 m B) 1122 m C) 1120 m
D) 990 m E) 1632 m

30. Dos círculos concéntricos inicialmente, de radios 60 m y 40 m, se mueven de modo que sus centros recorren dos rectas perpendiculares con una rapidez de 8 m/s y 6 m/s, respectivamente. ¿En qué tiempo los círculos pasaron de tangentes interiores a tangentes exteriores?

A) 9 s B) 10 s C) 7 s D) 11 s E) 8 s

Claves

NIVEL 1
1. B
2. A
3. C
4. B
5. B
6. B
7. E
8. A
9. D
10. D

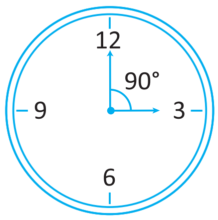
NIVEL 2
11. C
12. D
13. A
14. A
15. A
16. A
17. B
18. B
19. B
20. D

NIVEL 3
21. C
22. A
23. A
24. A
25. E
26. C
27. A
28. C
29. E
30. E

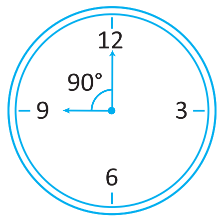
Cronometría

Ejemplo:
Halla una hora exacta (por la mañana) en la cual las agujas del reloj forman un ángulo recto, sabiendo, además, que si transcurren 3 horas, las agujas formarán un ángulo llano.

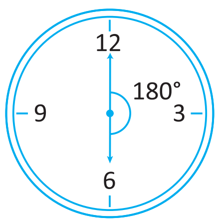
Resolución:
- Una hora exacta ... ángulo recto.



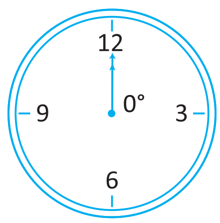
o



- Si transcurren 3 horas ... ángulo llano.



o



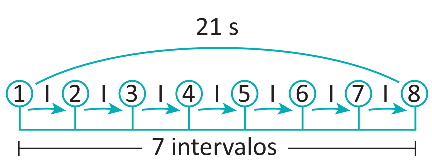
Luego, la hora pedida es 3:00 a. m.

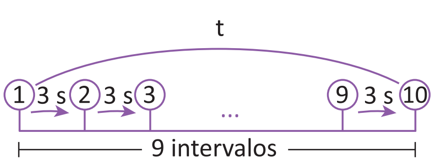
PROBLEMAS SOBRE CAMPANADAS

Ejemplo:
Un reloj señala la hora con igual número de campanadas, para indicar que son las 8:00 a. m. se demoró 21 s. ¿Cuánto tiempo demorará para indicar que son las 10:00 a. m.?

Resolución:
- Si el reloj da la hora con igual número de campanadas, entonces para indicar las 8:00 a. m. dará 8 campanadas, entre los cuales existen 7 intervalos y como se demora 21 s, cada intervalo será de 3 s.
- Luego para indicar las 10:00 a. m. dará 10 campanadas que equivalen a 9 intervalos y como cada intervalo es de 3 s, entonces el tiempo que demora es 9 × 3 = 27 s.

Gráficamente:





−1 (n.° de campanadas → n.° de intervalos); DP (n.° de intervalos → tiempo)

n.° de campanadas	n.° de intervalos	tiempo
8	7	21
10	9	t

$$I = \frac{21}{7} = 3\text{ s}$$

$$t = \frac{21 \times 9}{7}$$

$$t = 9 \times 3 = 27\text{ s}$$

Atención

Los problemas de cronometría se dividen en:
- Problemas sobre campanadas.
- Problemas sobre tiempo transcurrido y tiempo que falta transcurrir.
- Problemas sobre adelantos y atrasos.
- Problemas sobre ángulo formado por las agujas del reloj.



Nota

Un reloj de iglesia o catedral da como máximo 12 campanadas.
Ejemplo:
a) 2:00 <> 2 campanadas
14:00 <> 2 campanadas
b) 5:00 <> 5 campanadas
17:00 <> 5 campanadas
c) 8:00 <> 8 campanadas
20:00 <> 8 campanadas



Atención

- El número de campanadas y el tiempo que demora en dar las campanadas no son magnitudes directamente proporcionales; es decir, no podemos indicar que si un reloj demora en dar 2 campanadas 8 segundos, entonces para dar 6 campanadas demorará 24 segundos.
- En cambio, sí son magnitudes directamente proporcionales el tiempo empleado y el número de intervalos.
- Luego para expresar el número de intervalos, al número de campanadas le restamos una unidad.

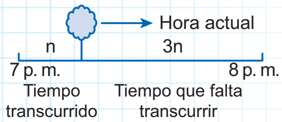
8 s ⟶ (2 – 1)
x ⟶ (6 – 1)

8 s ⟶ 1
x ⟶ 5

$x = 8 \times 5$
$x = 40$ s

Nota

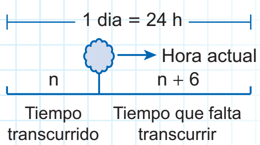
¿Qué hora es?



Del gráfico: $n + 3n = 60$
$4n = 60 \Rightarrow n = 15$
Ha pasado 15 min.
$\therefore$ Son las 7:15 p. m.

Nota

¿Qué hora es?

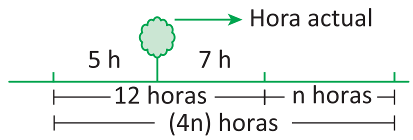


Del gráfico: $n + n + 6 = 24$
$2n = 18 \Rightarrow n = 9$
$\therefore$ Son las 9:00 a. m.

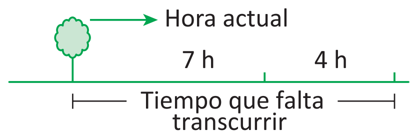
PROBLEMAS SOBRE TIEMPO TRANSCURRIDO Y TIEMPO QUE FALTA TRANSCURRIR

Ejemplo:
Hace 5 horas faltaba para acabar el día, el cuádruple del tiempo que faltará para acabar el día dentro de 7 horas. ¿Qué hora es?

Resolución:
De acuerdo al enunciado del problema se tiene:

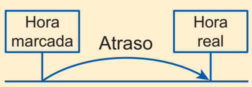


Del gráfico: $4n = n + 12$
$3n = 12 \Rightarrow n = 4$
Luego para acabar el día falta: $7 + 4 = 11$ h.
Gráficamente:



Entonces ha transcurrido 13 h.
$\therefore$ Son la 1:00 p. m.

Importante



Si un reloj está atrasado:

Hora real = Hora marcada + Atraso

PROBLEMAS SOBRE ADELANTOS Y ATRASOS

Ejemplo 1:
Un reloj marca las 8:00 p. m. ¿Qué hora es, en realidad, si hace 5 horas que se atrasa a razón de 4 minutos cada hora?

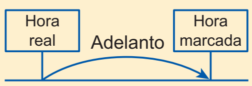
Resolución:

Tiempo transcurrido	Atraso
1 h	4 min
×5 ↓	↓ ×5
5 h	20 min

$\therefore$ Hora real: 8:00 p. m. + 20 min = 8:20 p. m.



Recuerda



Si un reloj está adelantado:

Hora real = Hora marcada – Adelanto

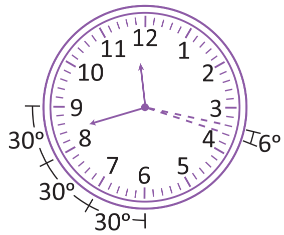
Ejemplo 2:
Un reloj se adelanta 3 minutos cada 4 horas. ¿A qué hora empezó a adelantarse si a las 8:30 p. m. marca 8:45 p. m.?

Resolución:

Adelanto	Tiempo transcurrido
3 min	4 h
×5 ↓	↓ ×5
15 min	20 h

Luego: 8:30 p. m. – 20 h = 12:30 a. m.

ÁNGULO FORMADO POR LAS AGUJAS DEL RELOJ



Ahora veamos que sucede con el desplazamiento del horario y el minutero:

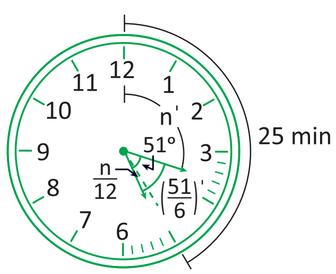
Desplazamiento del minutero	Desplazamiento del horario
60 min	5 min o 30°
30 min	2,5 min o 15°
48 min	4 min o 24°
24 min	2 min o 12°
x min	(x/12) min o (x/2)°

Ejemplo 1:
¿A qué hora entre las 5 y 6 las agujas del reloj forman un ángulo de 51° por primera vez?

Resolución:
El ángulo formado por las agujas es de 51° y ese ángulo se puede dar en dos casos:

- Cuando el minutero todavía no pasa al horario.
- Cuando el minutero ya pasó al horario.

Es por ello que nos indican, específicamente el ángulo formado por primera vez, es decir, se refiere al primer caso.



Del gráfico: $n + \left(\frac{51}{6}\right) = 25 + \left(\frac{n}{12}\right)$ en minutos

$$\left(\frac{11}{12}n\right)\text{min} = \left(\frac{99}{6}\right)\text{min}$$

$$n = 18$$

∴ La hora es 5 horas y 18 min.

Recuerda

- La circunferencia representa 360°.
- 1 hora equivale a 60 minutos y cada minuto a 60 segundos.
- Un reloj de agujas posee 12 divisiones que indican las horas y cada una de estas posee 5 pequeñas divisiones que corresponden a los minutos.

Luego:
60 div <> 60 min <> 360°
1 div <> 1 min <> 6°



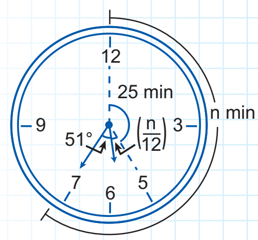
Importante

Cada vez que el minutero avanza una cantidad en minutos, entonces el horario avanza en minutos la doceava parte o también la mitad de dicha cantidad, pero en grados.
Ejemplo:

Minutero	Horario
36 min	3 min o 18°
24 min	2 min o 12°
12 min	1 min o 6°

Nota

¿A qué hora las agujas forman un ángulo de 51° por segunda vez?



Del gráfico:
$n = 25 + \frac{n}{12} + \frac{51}{6}$

$\frac{11n}{12} = \frac{201}{6} \Rightarrow n = \frac{402}{11}$

∴ A las 5 horas y $\frac{402}{11}$ min.

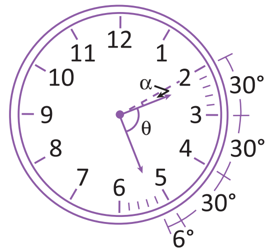
También se puede expresar en grados: $(6n)^\circ + 51^\circ = 150^\circ + \left(\frac{n}{2}\right)^\circ$

$$\left(\frac{11}{2}n\right)^\circ = 99^\circ$$

$$n = 18$$

Ejemplo 2:
Halla el ángulo que forman las agujas de un reloj a las 2:26.

Resolución:
Gráficamente:



- Del gráfico: $\alpha = \left(\frac{26}{2}\right)^\circ \Rightarrow \alpha = 13^\circ$
- También: $\underbrace{\alpha} + \theta = 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 6^\circ$

$13^\circ + \theta = 96^\circ$

$\theta = 83^\circ$

- Luego: $\theta = \frac{11}{2}(26) - 30(2)$

  ↓ minutos ↓ hora

En general:
θ: ángulo que forma el horario y el minutero.
Sea la hora H:M

- Cuando el horario adelanta al minutero:

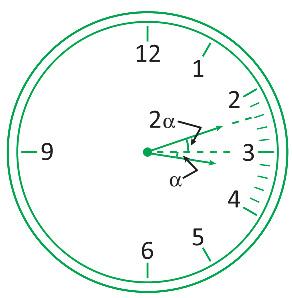
$$\theta = 30H - \frac{11}{2}M$$

- Cuando el minutero adelanta al horario:

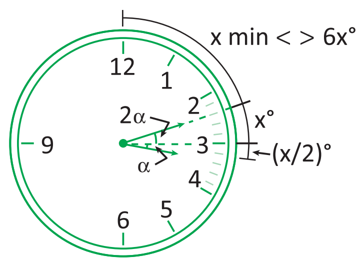
$$\theta = \frac{11}{2}M - 30H$$

Ejemplo 3:

¿Qué hora indica el reloj de la figura?



Resolución:
Sea la hora: 3 : x



Del gráfico: $6x^\circ + x^\circ = 90^\circ$

$7x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 12\frac{6}{7}$

$\therefore$ La hora será: $3\text{ h} + 12\frac{6}{7}\text{ min}$

Recuerda

Para la resolución de este tipo de problema (ejemplo 2) se recomienda analizar a partir de la hora exacta anterior a la hora que se indica.

Ejemplo:

Hora indicada	Hora de referencia
7:29	7:00
11:36	11:00
9:23	9:00



Observación

En el ejemplo 2 aplicando la fórmula se tiene:

H = 2 ; M = 26

Como el minutero adelanta al horario:

$\theta = \frac{11}{2}M - 30H$

$\theta = \frac{11}{2}(26) - 30(2)$

$\theta = 143 - 60$

$\theta = 83^\circ$



Problemas resueltos

1 El campanario de un reloj demora (m + 1) segundos en tocar m^2 campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en 4 s?

Resolución:

m^2 camp ⟶ (m + 1) s

x camp ⟶ 4 s

Luego:

m^2 camp. <> $(m^2 - 1)$ intervalos

x camp. <> (x – 1) intervalos

Entonces:

$m^2 - 1$ ⟶ (m + 1) s

x – 1 ⟶ 4 s

$$(m+1)(x-1) = 4(m^2-1)$$

$$(m+1)(x-1) = 4(m+1)(m-1)$$

$$x - 1 = 4m - 4$$

$$x = 4m - 3$$

∴ n.° de campanadas: 4m – 3.

2 Se sabe que el campanario de un reloj toca una campanada cada vez que transcurre 1/4 de hora, pero cuando sucede una hora en punto la indica con un número de campanadas igual a la hora que señala. ¿Cuántas campanadas tocará hasta el mediodía de hoy?

Resolución:

Veamos el número de campanadas:

0 h ⟶ 0 camp. } 3 camp.

1 h ⟶ 1 camp. } 3 camp.

2 h ⟶ 2 camp. } 3 camp.

3 h ⟶ 3 camp.

⋮

11 h ⟶ 11 camp. } 3 camp.

12 h ⟶ 12 camp.

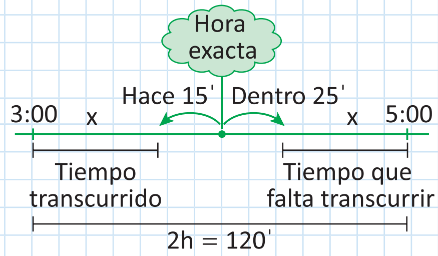
Número de campanadas = 1 + 2 + 3 + ... + 11 + 12 + (3 + 3 + ... + 3)

(1 + 12 = 13, 2 + 11 = 13, ⋮ — 6 veces; 3 + 3 + ... + 3: 12 veces)

Número de campanadas = 13(6) + 12(3) = 114 campanadas

3 Ya pasaron las 3:00 p. m., pero todavía no son las 4:00 p. m. de esta tarde. Si hubieran pasado 25 minutos más, faltaría, para las 5:00 p. m., los mismos minutos que pasaron desde los 3:00 p. m. hasta hace 15 minutos. ¿Qué hora es?

Resolución:



Del gráfico:

$$x + 15 + 25 + x = 120$$

$$2x + 40 = 120$$

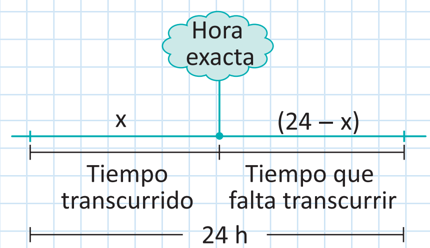
$$2x = 80 \Rightarrow x = 40'$$

Hora exacta: 3 h + 40' + 15' ⇒ 3 h + 55'

∴ Son las 3:55 p. m.

4 Diana le pregunta la hora a Daniel y él le responde: Para saber la hora, debes sumar la mitad del tiempo que falta para acabar el día con los 2/3 del tiempo que ha transcurrido, ¿qué hora es?

Resolución:



Del dato:

$$x = \frac{1}{2}(24 - x) + \frac{2}{3}x$$

$$6x = 72 - 3x + 4x$$

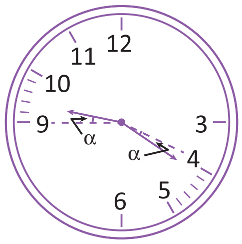
$$5x = 72$$

$$x = \frac{72}{5} = \left(14\frac{2}{5}\right)h = 14h + \frac{2}{5}h$$

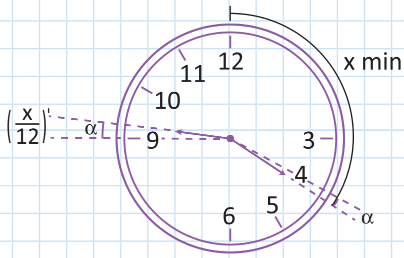
Además: $\frac{2}{5}$ h = 24 min.

∴ Hora exacta: 14 h + 24 min. = 2 : 24 p. m.

5 ¿Qué hora marca el reloj mostrado?



Resolución:



Sabemos que:

Minutero	Horario
x min	$\left(\frac{x}{12}\right)$min

Entonces: $\alpha <> \left(\frac{x}{12}\right)$ min

Del gráfico:

$x \text{ min} = 20 \text{ min} + \alpha$

$x \text{ min} = 20 \text{ min} + \left(\frac{x}{12}\right) \text{ min}$

$\frac{11}{12}x = 20 \Rightarrow x = 21\frac{9}{11}$

$\therefore$ El reloj marca: 9 h + 21 $\frac{9}{11}$ min

6 ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 3 h, 17 min y 20 s?

Resolución:

El minutero adelanta al horario por lo tanto aplicamos:

$\theta = \frac{11}{2} M - 30 H$

$\theta = ?;\ H = 3;\ M = 17 \text{ min} + 20 \text{ s} <> \frac{52}{3} \text{ min}$

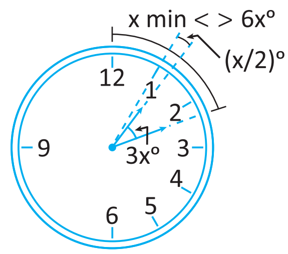
Reemplazando:

$\theta = \frac{52}{3}\left(\frac{11}{2}\right) - 30(3) = \frac{286°}{3} - 90°$

$\theta = \left(\frac{16}{3}\right)^{\circ}$

$\therefore \theta = 5° + \left(\frac{1}{3}\right)^{\circ} = 5°20'$

7 Son más de la 1, sin ser las 2 de la tarde. Si el número de minutos transcurridos, a partir de la 1:00 p.m., es igual a la tercera parte del número en grados sexagesimales que adelanta el minutero al horario. ¿Qué hora es realmente?



Resolución:

Del gráfico:

$6x° = 30° + \left(\frac{x}{2}\right)^{\circ} + 3x°$

$\left(\frac{5x}{2}\right)^{\circ} = 30° \Rightarrow x = 12$

$\therefore$ Son la 1:12 p. m.

8 En el planeta Sagitario, el día dura 16 cronos y cada crono tiene 45 min. ¿Qué hora será en un reloj de este planeta, cuando un reloj de la Tierra marque 6:20 p. m.?

Obs.: un día del planeta Sagitario es equivalente a un día del planeta Tierra.

Resolución:

6:20 p. m. $<> 18 \text{ h} + \frac{1}{3} \text{ h} = \frac{55}{3} \text{ h}$

	Planeta tierra	Planeta sagitario
	1 día <> 24 h →	16 cronos
Tiempo transcurrido	$<> \frac{55}{3}$ h →	x cronos

$24 \cdot x = \frac{55}{3} \cdot 16 \Rightarrow x = 12\frac{2}{9}$ cronos

Además:

1 hora <> 45 min

$\Rightarrow \frac{2}{9}$ hora <> 10 min

$\therefore$ En el planeta Sagitario serán las 12:10.

Actividades de razonamiento

1. Si un campanario tarda 12 segundos en tocar 7 campanadas, ¿cuántas campanadas tocará en 12 minutos?

A) 360 B) 361 C) 362
D) 363 E) 364

2. Si un reloj da 6 campanadas en 5 segundos, ¿en qué tiempo tocará 63 campanadas?

A) 60 s B) 61 s C) 62 s
D) 63 s E) 64 s

3. Según la antigua creencia, un fantasma aparece en cuanto empieza a dar las 12 de la noche en el reloj de pared y desaparece al sonar la última campanada. ¿Cuánto dura la aparición del fantasma, si se sabe que el reloj tarda seis segundos en dar las 6?

A) 12 s B) 11 s C) 13 s
D) 13,2 s E) 11,2 s

4. Un reloj da $(m - 1)$ campanadas en $(m - 2)^2$ segundos. ¿Cuántos segundos tardará en tocar $(m + 3)$ campanadas?

A) $m - 2$ B) $m^2 - 2$ C) $2m - 1$
D) $m^2 + 2$ E) $m^2 - 4$

5. ¿Qué hora es, si ya pasaron los 3/5 del tiempo del día que falta por transcurrir?

A) 15:00 p. m. B) 9:00 a. m. C) 8:00 a. m.
D) 13:00 p. m. E) 14:00 a. m.

6. Arturo al observar una campana nota que da 5 campanadas en 10 segundos. ¿Qué tiempo tardará en dar 25 campanadas?

A) 50 s B) 62 s C) 60 s
D) 52 s E) 65 s

7. Hace 20 minutos, el tiempo que faltaba para las 4 p. m. era el triple de lo que faltará para dicha hora, pero dentro de 10 minutos. ¿Qué hora es?

A) 3:30 p. m. B) 3:35 p. m. C) 3:45 p. m.
D) 3:55 p. m. E) 3:32 p. m.

8. Un reloj se atrasa 5 minutos cada hora. ¿Después de cuánto tiempo volverá a marcar la hora exacta?

A) 10 días B) 6 días C) 8 días
D) 12 días E) 16 días

9. Empecé a estudiar cuando la aguja horaria de mi reloj estaba entre las 7 y 8 de la mañana. Cuando dejé de estudiar, por la tarde, me percaté que la aguja minutera estaba en la misma posición que cuando empecé a estudiar y la aguja horaria estaba en la posición opuesta a la de la mañana. ¿Cuánto tiempo en total estudié?

A) 6 h B) 8 h C) 9 h
D) 7 h E) 6,5 h

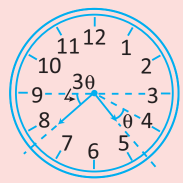
10. Calcula el ángulo que forman las manecillas del reloj a la 1:18.

A) 60° B) 69° C) 68°
D) 67° E) 70°

11. Determina el complemento del complemento del menor ángulo que forman las agujas del reloj a las 12 horas y 15 minutos.

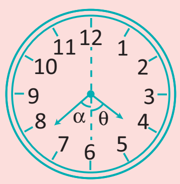
A) 26° B) 7° 30' C) 82° 30'
D) 28° E) 29°

12. ¿Qué hora es?



A) 4:36 B) 4:39 C) 4:38
D) 4:37 E) $4{:}35\frac{1}{2}$

13. ¿Qué hora marca el reloj de la figura?
Si: $\alpha - \theta = 3{,}75°$.



A) 7h 37' 30" B) 7h 35' 30" C) 7h 36' 30"
D) 7h 38' 30" E) 7h 39' 30"

14. El horario de un reloj mide 2 cm y el minutero es el doble, cuando sean las 4 h y $10\frac{10}{11}$ min. ¿Cuál será la distancia de separación entre los extremos de las manecillas?

A) $\sqrt{3}$ cm B) $2\sqrt{3}$ cm C) 4 cm
D) $\sqrt{3}/2$ cm E) 2 cm

Claves

1. B	5. B	9. A	13. A
2. C	6. C	10. B	14. B
3. D	7. B	11. C	
4. E	8. B	12. A	

Reto



Un extraño reloj tiene 8 marcas horarias y en un día el horario da 2 vueltas completas. Si además una hora tiene 80 minutos y un minuto tiene 80 segundos. ¿Qué ángulo formarán sus agujas (horario y minutero) cuando indiquen las 3:42.



Rpta.: 30,375°

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Son más de las 4:00 p. m. y el tiempo que falta para las 6:00 p. m. es el mismo tiempo que ha pasado desde las 3:00 p. m. hasta este instante. ¿Qué hora es?

   A) 4:30 p. m. B) 4:20 p. m. C) 4:15 p. m.
   D) 4:40 p. m. E) 5:00 p. m.

2. Un alumno que debería ir temprano al colegio, se levanta tarde y pregunta la hora a su madre y esta le responde: "El duplo de las horas transcurridas del día es igual al cuádruple de las que faltan por transcurrir para llegar a las 12 m". ¿Qué hora es?

   A) 8:00 a. m. B) 10:00 a. m. C) 7:00 a. m.
   D) 9:00 a. m. E) 11:00 a. m.

3. Falta transcurrir del día la mitad del tiempo transcurrido desde el inicio del día. ¿Qué hora será cuando transcurra el doble del tiempo que transcurrió hace 15 horas?

   A) 7:00 p. m. B) 4:00 p. m. C) 5:00 p. m.
   D) 6:00 p. m. E) 2:00 p. m.

4. Ana le pregunta a Mario la hora y este le responde: "Ha transcurrido del día los 5/7 de lo que falta por transcurrir." Si Ana tiene una reunión a las 7 p. m., ¿cuántas horas faltan para dicha reunión?

   A) 7 h B) 9 h C) 10 h D) 12 h E) 15 h

5. Un reloj se adelanta 1 minuto cada 15 minutos. Si en este momento marca 6 h y 30 min y hace 9 horas que se adelanta, ¿qué hora es realmente?

   A) 5 h 54 min B) 5 h 32 min
   C) 5 h 45 min D) 5 h 50 min
   E) 5 h 40 min

6. Han transcurrido 120 días para que un reloj, que se adelanta, marque nuevamente la hora correcta. ¿Cada cuántas horas se adelanta 6 minutos dicho reloj?

   A) 24 h B) 20 h C) 27 h D) 22 h E) 29 h

7. Hace 15 horas que se adelanta un reloj. ¿Cuánto se adelanta por hora, si señala las 6 h 20 min cuando son las 6 h 14 min?

   A) 24 s B) 20 s C) 25 s D) 30 s E) 28 s

8. Un campanario toca 6 campanadas en 15 segundos. ¿Cuántas campanadas tocará el mismo campanario en 30 segundos?

   A) 10 B) 12 C) 11 D) 7 E) 15

9. Calcula el número de campanadas en total que da un reloj desde 1 minuto después de mediodía hasta las 12 de la noche. Se sabe que cada hora la señala con igual número de campanadas como horas indica; las medias horas con 2 campanadas y los cuarto y tres cuartos de hora con 1 campanada.

A) 126 B) 136 C) 135 D) 125 E) 145

10. Un reloj demora $(m+1)$ s en tocar m^2 campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en 1 s?

A) m B) $m-1$ C) $m+1$
D) m^2 E) m^2-1

NIVEL 2

11. En cierto momento un automovilista observa que ha recorrido los 3/5 de lo que le falta por recorrer. Para recorrer todo el trayecto calcula que se demorará 16 horas. Si partió a las 7 a. m., ¿qué hora es?
(La rapidez que emplea es constante).

A) 11:00 a. m. B) 1:00 p. m. C) 2:00 p. m.
D) 4:00 p. m. E) 5:00 p. m.

12. Se tiene un reloj que se adelanta 3 minutos cada 2 horas. ¿Qué hora será en realidad cuando este reloj marque las 11:15 a. m., si se sabe que dicho reloj lleva 30 horas con la imperfección?

A) 11:30 a. m. B) 10:30 a. m.
C) 11:00 a. m. D) 10:40 a. m.
E) 9:30 a. m.

13. Se sabe que el reloj de José se atrasa 2 minutos cada hora. Si en estos instantes sincroniza su reloj, ¿cuánto tiempo debe transcurrir como mínimo para que vuelva a marcar la hora correcta?

A) 20 días B) 15 días C) 10 días
D) 18 días E) 19 días

14. Un reloj se atrasa 3 minutos cada 5 horas. Si marcó la hora correcta por última vez a las 8:00 p. m. del día lunes, ¿en qué día y hora se encontrará con un atraso de 18 minutos?

A) martes 6:00 a. m. B) martes 2:00 a. m.
C) miércoles 2:00 a. m. D) martes 8:00 p. m.
E) miércoles 2:00 p. m.

15. Un reloj indica la hora con igual número de campanadas. ¿Cuánto tardará un reloj en indicar las 8:00, si para indicar las 6:00 tardó tantos segundos como la mitad de campanadas que dio en 38 s?

A) 21 s B) 14 s C) 12 s D) 28 s E) 15 s

16. Un campanario toca C campanadas en S segundos, ¿cuántos segundos tardará en tocar C^2-1 campanadas?



A) $\dfrac{S(C^2-2)}{C-1}$ B) $\dfrac{C(S-2)}{S-1}$ C) $\dfrac{C^2(S-1)}{S-2}$

D) $\dfrac{S^2-2}{C-1}$ E) $\dfrac{S(C-2)}{S^2-1}$

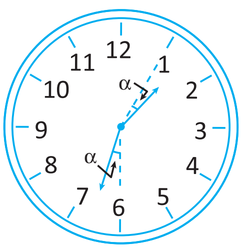
17. Isabel al ver la hora confunde el minutero por el horario y viceversa. Si ella dice: "Son las 7 h 48 min.", ¿qué hora es realmente?

A) 9 h 38 min B) 9 h 36 min
C) 9 h 37 min D) 9 h 39 min
E) 9 h 35 min

18. Faltando 5 minutos para las 12. ¿Qué ángulo estarán formando las agujas del reloj?

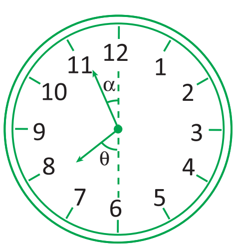
A) 26° 40' B) 27° 30' C) 25° 20'
D) 29° 30' E) 27° 40'

19. ¿Qué hora marca el siguiente reloj?



A) 1h 33 $\frac{4}{11}$ min B) 1h 35 $\frac{3}{11}$ min
C) 1h 32 $\frac{8}{11}$ min D) 1h 34 $\frac{2}{11}$ min
E) 1h 31 $\frac{5}{11}$ min

20. ¿Qué hora es según el gráfico si: $2\theta - \alpha = 99°$



A) 7:56
B) 7:59
C) 7:54
D) 7:57
E) 7:53

NIVEL 3

21. Se tienen 2 relojes malogrados que están marcando la hora correcta. Si uno de ellos se adelanta 1 min cada hora, y el otro se atrasa 2 min cada hora. ¿Qué tiempo como mínimo tiene que transcurrir para que los 2 relojes vuelvan a marcar la hora correcta simultáneamente?

A) 10 días B) 15 días C) 25 días
D) 30 días E) 18 días

22. Jean tiene un reloj y Carlos tiene otro. El de Jean da la hora más de prisa que el de Carlos; de hecho, el reloj de Jean da 3 campanadas en el mismo tiempo que el de Carlos da 2. Un día, a una determinada hora, los dos relojes comenzaron a sonar al mismo tiempo. Cuando el reloj de Jean había terminado de dar la hora, el reloj de Carlos dio 3 campanadas menos. ¿A qué hora ocurrió esto?



A) 4:00 B) 5:00 C) 6:00
D) 7:00 E) 12:00

23. Se sincronizan 2 relojes a las 4:00 p.m., uno se adelanta 3 min en 1 hora y el otro se atrasa 6 min en 1 hora. ¿Cuántas horas tienen que pasar como mínimo para que ambos indiquen la misma hora por tercera vez?

A) 180 h B) 240 h C) 120 h
D) 160 h E) 250 h

24. Dos campanarios, se hallan alejados 4760 m. Si el primero está adelantado 2 segundos y el otro atrasado 2 segundos. ¿A qué distancia del primer reloj deberá colocarse una persona para escuchar las campanadas al mismo tiempo? ($v_{sonido} = 340$ m/s)

A) 3000 m B) 3060 m C) 4080 m
D) 3600 m E) 2160 m

25. Faltan algunos minutos para las 18 horas y el mayor ángulo entre las agujas es dos veces mayor que el menor ángulo entre ellas. ¿Qué hora es?

A) 5:43 7/11 B) 5:55 10/11 C) 5:50
D) 5:40 E) 5:47 3/11

26. El horario de un reloj mide 2 cm y el minutero el doble. Cuando sean las 3:00 p. m., ¿cuál será la distancia de separación entre los extremos de las manecillas?

A) $\sqrt{2}$ cm B) $\sqrt{3}$ cm C) $2\sqrt{5}$ cm
D) $2\sqrt{3}$ cm E) $\sqrt{7}$ cm

27. Un reloj se atrasa dos minutos por cada hora transcurrida. Si comienza a funcionar a las 2 p. m., entonces, transcurridas 39 horas, sus agujas marcarán las:

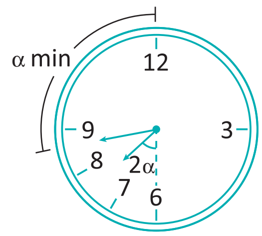
UNMSM 2009-II

A) 2:30 a. m. B) 3:18 p. m. C) 2:15 a. m.
D) 3:42 a. m. E) 3:12 p. m.

28. Son más de las 3:20, pero no son más de las 3:25. Observo la situación de las agujas de mi reloj, después giro las agujas sin romper el mecanismo y llego a poner exactamente la grande en el lugar anterior de la pequeña; mientras que esta ocupa el lugar que la grande ocupaba anteriormente. ¿Qué hora es exactamente?

A) 3:22 B) 3:21 C) 3:23 $\frac{1}{143}$
D) 3:21 $\frac{57}{143}$ E) 3:23 $\frac{2}{143}$

29. Según el gráfico, ¿qué hora indica el reloj?



A) 7:36 B) 7:38 C) 7:42
D) 7:37 E) 7:40

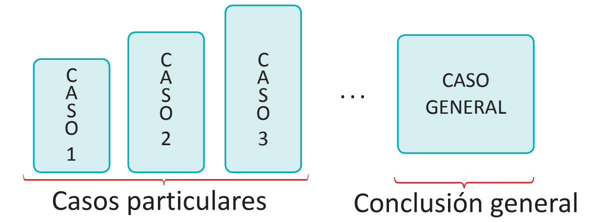
Claves

NIVEL 1	9. A	17. D	25. A
1. A	10. A	18. B	26. C
2. A	**NIVEL 2**	19. C	27. D
3. D	11. B	20. D	28. D
4. B	12. B	**NIVEL 3**	29. A
5. A	13. B	21. D	
6. A	14. C	22. D	
7. A	15. B	23. B	
8. C	16. A	24. B	

Inducción-Deducción

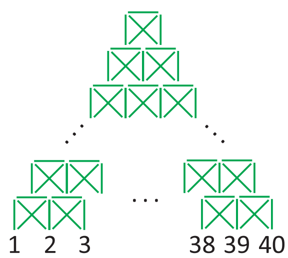
INDUCCIÓN

Es una manera de razonar, en el que a partir de la observación de casos particulares, nos conduce al descubrimiento de leyes generales.



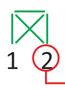
Razonamiento inductivo

Ejemplo:
¿Cuántos palitos hay en total en la siguiente figura?



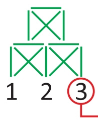
Resolución:

Caso 1:



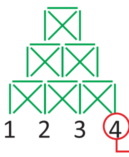
$5 = 3 + 2$
$2^2 - 1 + 2 \times 1$

Caso 2:



$14 = 8 + 6$
$3^2 - 1 + 3 \times 2$

Caso 3:

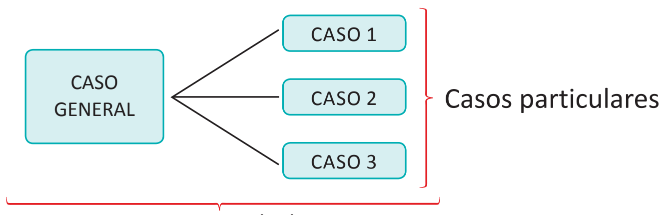


$27 = 15 + 12$
$4^2 - 1 + 4 \times 3$

$\therefore$ El total de palitos será: $40^2 - 1 + 40 \times 39 = 3159$

DEDUCCIÓN

Es una manera de razonar mediante el cual, a partir de informaciones, casos o criterios generales, se obtiene una conclusión particular.



Razonamiento deductivo

Nota

Ejemplo:

Casos particulares:
- Andrés es hermano de Lucas y es noble.
- Carlos es hermano de Lucas y es noble.
- David es hermano de Lucas y es noble.

Conclusión general: Todos los hermanos de Lucas son nobles.

Recuerda

Cuando un ejercicio se presenta muy operativo y los casos se distribuyen respondiendo a una formación recurrente, entonces ensayamos un proceso inductivo.



Nota

Podemos observar que el total de palitos se ha dividido en dos sumandos con el siguiente criterio: el primer sumando corresponde a los palitos horizontales y verticales y el segundo sumando corresponde a los palitos cruzados.

Nota

Ejemplo:
- Todos los peruanos son americanos.
- Todos los limeños son peruanos.
- Por lo tanto, se deduce que todos los limeños son americanos.

Problemas resueltos

1 Si: $\overline{mnp} \times m = 552$
$\overline{mnp} \times n = 276$
$\overline{mnp} \times p = 828$
Calcula: $R = (a + b + c)^2$

Resolución:

$\overline{mnp} \times m = 552 = 276 \times 2 \Rightarrow m = 2$
$\overline{mnp} \times n = 276 = 276 \times 1 \Rightarrow n = 1$
$\overline{mnp} \times p = 828 = 276 \times 3 \Rightarrow p = 3$
$\therefore R = (a + b + c)^2 = (2 + 1 + 3)^2 = 36$

2 Halla a si:

$$\sqrt{\overline{a5} \times \overline{a6} \times \overline{a7} \times \overline{a8} + 1} = 2161$$

Resolución:

Aplicamos inducción, ya que los 4 números son consecutivos.

Caso 1: $\sqrt{1 . 2 . 3 . 4 + 1} = 5 \Rightarrow 1 . 4 + 1$

Caso 2: $\sqrt{2 . 3 . 4 . 5 + 1} = 11 \Rightarrow 2 . 5 + 1$

Caso 3: $\sqrt{3 . 4 . 5 . 6 + 1} = 19 \Rightarrow 3 . 6 + 1$

Entonces, bastará con multiplicar el mayor y menor de los números y sumarle 1.

En el problema: $\overline{a5} \times \overline{a8} + 1 = 2161$
$\therefore a = 4$

3 Halla F:

$$F = \frac{21}{23} + \frac{2121}{2323} + \ldots + \underbrace{\frac{2121\ldots21}{2323\ldots23}}_{46 \text{ cifras}}$$

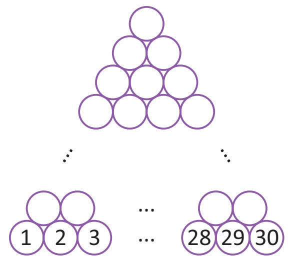
Resolución:

$$F = \frac{21}{23} + \frac{21(101)}{23(101)} + \ldots + \frac{21(101\ldots101)}{23(101\ldots101)}$$

$$F = \underbrace{\frac{21}{23} + \frac{21}{23} + \ldots \quad \ldots + \frac{21}{23}}_{23 \text{ sumandos}}$$

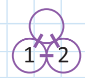
$$\therefore F = \left(\frac{21}{23}\right) \times 23 = 21$$

4 ¿Cuántos puntos de contacto hay en la siguiente distribución de esferas?

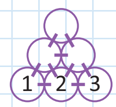


Resolución:

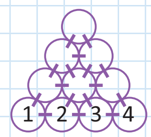
Aplicamos inducción:



$3 = 3(1) = 3\left(\frac{1 \times 2}{2}\right)$



$9 = 3(3) = 3\left(\frac{2 \times 3}{2}\right)$



$18 = 3(6) = 3\left(\frac{3 \times 4}{2}\right)$

Luego:
n.° total de puntos de contacto será:

$3\left(\frac{29 \times 30}{2}\right) = 1305$

5 Halla $E = \overline{abcd} + \overline{mnpp} + \overline{xyzw}$.

Sabiendo que:

$\overline{bd} + \overline{np} + \overline{yw} = 160$

$\overline{ac} + \overline{mp} + \overline{xz} = 127$

$\overline{ab} + \overline{mn} + \overline{xy} = 124$

Resolución:

Ordenamos los datos:

a) $\begin{array}{r} \overline{bd} \; + \\ \overline{np} \\ \overline{yw} \\ \hline 160 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} \overline{ac} \; + \\ \overline{mp} \\ \overline{xz} \\ \hline 127 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} \overline{ab} \; + \\ \overline{mn} \\ \overline{xy} \\ \hline 124 \end{array}$

De a) y c) se deduce: $d + p + w = 20$
$b + n + y = 14$

En c) como: $b + n + y = 14 \Rightarrow a + m + x = 11$
En b) como: $a + m + x = 11 \Rightarrow c + p + z = 17$

Luego: $E = \overline{abcd} + \overline{mnpp} + \overline{xyzw} = 12\,590$

6 Calcula la suma de las cifras del desarrollo de:

$$P = \left(\sqrt{9} \times \frac{1}{(\underbrace{333...33}_{20\text{ cifras}})^{-1}} + 1\right)^2$$

Resolución:

$P \ = \ (3 \times \underbrace{333 \ldots 33}_{20\text{ cifras}} + 1)^2$

$P = (\underbrace{999 \ldots 99}_{20\text{ cifras}} + 1)^2$

Aplicamos inducción:

	Suma de cifras
Caso1: $(9 + 1)^2 = 100$	1
Caso 2: $(99 + 1)^2 = 10\,000$	1
Caso 3: $(999 + 1)^2 = 1000\,000$	1

Luego la suma de cifras siempre resulta 1.

$\therefore$ La suma de cifras de P es 1.

7 Si: $a + b + c = 7$

$a^2 + b^2 + c^2 = 11$

Halla: $M = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2$

Resolución:

Sabemos que:

$(a + b + c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2} + 2ab + 2bc + 2ac$

$7^2 \ = \ 11 + 2ab + 2bc + 2ac$

$2ab + 2bc + 2ac = 38$

Luego, piden:

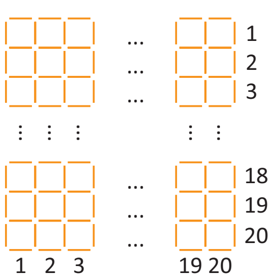
$M = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2$

$M = a^2 + b^2 + 2ab + b^2 + c^2 + 2bc + a^2 + c^2 + 2ac$

$M = 2(\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{11}) + \underbrace{2ab + 2bc + 2ac}_{38}$

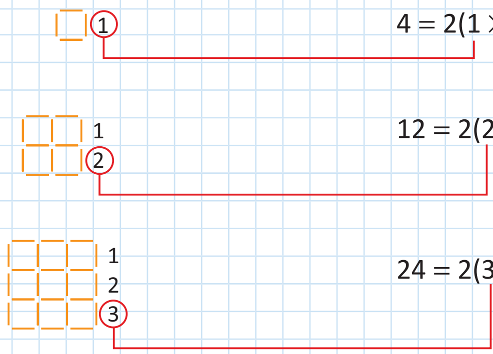
$\therefore \ M = 60$

8 ¿Cuántos palitos hay en total?



Resolución:

Aplicamos inducción:



	n.° de palitos
Caso 1	$4 = 2(1 \times 2)$
Caso 2	$12 = 2(2 \times 3)$
Caso 3	$24 = 2(3 \times 4)$

$\therefore$ El número total de palitos será:

$2(20 \times 21) = 840$

9 Si:

$M(1) = 4 \,.\, 1 + 1$

$M(2) = 8 \,.\, 4 + 8$

$M(3) = 12 \,.\, 9 + 27$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Calcula el valor de x, si $M(x) = 4 \times 10^4$.

Resolución:

De los datos:

$M(1) = 4 \,.\, 1 + 1 \quad \Rightarrow \quad 4(1) \,.\, 1^2 + 1^3$

$M(2) = 8 \,.\, 4 + 8 \quad \Rightarrow \quad 4(2) \,.\, 2^2 + 2^3$

$M(3) = 12 \,.\, 9 + 27 \quad \Rightarrow \quad 4(3) \,.\, 3^2 + 3^3$

Luego:

$M(x) = 4(x) \,.\, x^2 + x^3 \qquad ...(I)$

También:

$M(x) = 4 \,.\, 10^4 \qquad ...(II)$

(I) = (II):

$4(x) \,.\, x^2 + x^3 = 4 \,.\, 10^4$

$4x^3 + x^3 = 4 \,.\, 10^4$

$5x^3 = 4 \,.\, 10^4$

$x^3 = 4 \,.\, 10^3 \,.\, 2$

$\therefore x = 20$

Actividades de razonamiento

1. ¿Cuántos triángulos del mismo tamaño, como máximo, se podrán formar al unir los centros de los círculos en la figura 20?

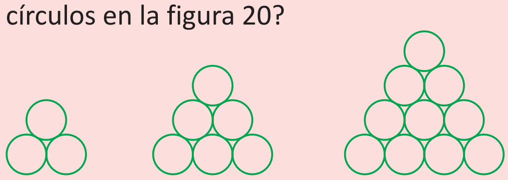


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

A) 350 B) 400 C) 300
D) 450 E) 200

2. Calcula la suma de los números de la figura 10.

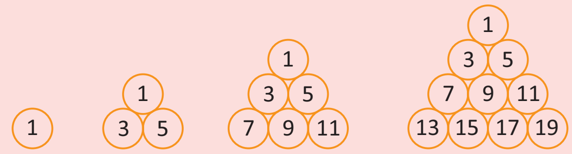


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

A) 5023 B) 5555 C) 4355
D) 2835 E) 3025

3. Calcula el resultado de:

$E = \sqrt{10305050301 + 2040604020}$

A) 234 567 B) 123 456 C) 135 791
D) 111 111 E) 246 810

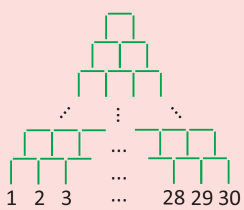
4. Si:

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$

Halla $\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k$; $k \in \mathbb{Z}^+$.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 6 E) 4

5. Calcula el número total de palitos en la siguiente figura:



A) 900 B) 890 C) 899
D) 889 E) 901

6. Calcula la suma de cifras del resultado de:

$E = (\underbrace{111...111}_{9 \text{ cifras}})^2$

A) 64 B) 49 C) 81
D) 100 E) 121

7. ¿Cuántos triángulos habrá en la figura de posición 20?



Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

A) 190 B) 240 C) 420
D) 200 E) 210

8. Halla la suma de las cifras del resultado de la siguiente expresión:

$B = (\underbrace{100...005}_{105 \text{ cifras}})^2$

A) 11 B) 9 C) 10
D) 8 E) 12

9. Calcula la suma de cifras del resultado de la siguiente expresión:

$$R = (\underbrace{333...334}_{21\text{ cifras}})^2$$

A) 127 B) 128 C) 129
D) 130 E) 125

10. ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra ESPERANZA?

```
                E
              S   S
            P   P   P
          E   E   E   E
        R   R   R   R   R
      A   A   A   A   A   A
    N   N   N   N   N   N   N
  Z   Z   Z   Z   Z   Z   Z   Z
A   A   A   A   A   A   A   A   A
```

A) 384 B) 64 C) 128 D) 256 E) 512

11. Si:
A = 74 + 72 + 70 + ... + 4 + 2
B = 578 + 512 + 450 + ... + 8 + 2
Calcula: S = A + B

A) 4876 B) 4976 C) 4886
D) 4986 E) 4726

12. Calcula la suma de todos los elementos del siguiente arreglo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & 19 & 20 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \ldots & 20 & 21 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \ldots & 21 & 22 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \ldots & 22 & 23 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 19 & 20 & 21 & 22 \ldots & 27 & 28 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \ldots & 28 & 29 \end{bmatrix}$$

A) 8200 B) 8050 C) 8000
D) 9480 E) 9261

13. ¿Cuántos puntos de contacto habrá en la figura 20?

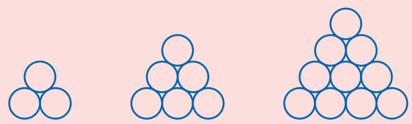


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

A) 580 B) 610 C) 630
D) 640 E) 650

14. Calcula la suma de las cifras del resultado de la siguiente expresión:

$$T = \sqrt{\underbrace{444...44}_{300\text{ cifras}} - \underbrace{888...88}_{150\text{ cifras}}}$$

A) 950 B) 975 C) 925
D) 965 E) 900

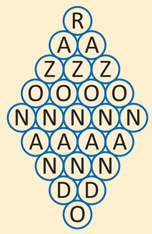
Claves

1. B 2. E 3. D 4. B
5. C 6. C 7. E 8. B
9. A 10. D 11. B 12. C
13. C 14. E

Reto

¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra "RAZONANDO", uniendo círculos consecutivos?



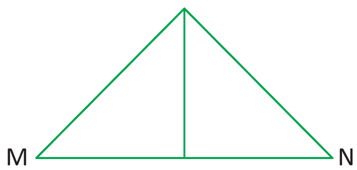


Rpta.: 70

Refuerza practicando

NIVEL 1

1 Si a la siguiente figura le trazamos 50 rectas paralelas a $\overline{MN}$. ¿Cuántos triángulos se contarán en total?



A) 137
B) 142
C) 153
D) 162
E) 146

2 Se muestra los puntajes que obtiene un alumno en sus exámenes. ¿Cuál fue la nota que obtuvo en el duodécimo examen?

n.° de examen		Puntaje
1	→	2
2	→	5
3	→	10
4	→	17
⋮	⋮	⋮

A) 194 B) 137 C) 226 D) 145 E) 205

3 Calcula la suma de los términos de la fila 50.

Fila 1 → 1
Fila 2 → 3 5
Fila 3 → 7 9 11
Fila 4 → 13 15 17 19
⋮ ⋮

A) 9750 B) 12 500 C) 25 000
D) 75 200 E) 125 000

4 Calcula:

$$S = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + ...}_{25 \text{ términos}}$$

A) 425 B) 625 C) 305 D) 915 E) 225

5 Calcula la suma de las cifras de:

$$E = (\underbrace{333...3334}_{51 \text{ cifras}})^2$$

A) 127 B) 307 C) 237 D) 327 E) 257

6 Calcula (a + b), si:

$$(\underbrace{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times ...}_{20 \text{ factores}})^2 = \overline{...ab}$$

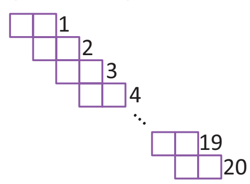
A) 5 B) 7 C) 9 D) 6 E) 8

7 Halla: $\overline{abc}.\overline{ab}$

Si: $\overline{abc}.b = 3792$
$\overline{abc}.a = 1896$

A) 22 721 B) 22 752 C) 32 711
D) 42 112 E) 33 121

8 ¿Cuántos cuadriláteros se pueden contar en la siguiente figura?



A) 76
B) 78
C) 79
D) 80
E) 81

9 Si: $\underbrace{a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \overline{aaaa} + ... + \overline{aaa...aaa}}_{39 \text{ sumandos}} = \overline{...yx1}$

Calcula: $R = (x - a)^y$

A) 1 B) −3 C) 9 D) 4 E) 25

10. Halla la última cifra del resultado de E.

$E = 3671^{31} + (825^{19} + 1)(26^2 - 1)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

NIVEL 2

11. Calcula la suma de cifras del resultado de:
$M = (111111)^2$

A) 32 B) 36 C) 38 D) 42 E) 46

12. Calcula la suma de cifras del resultado de A.

$A = (\underbrace{999...9995}_{101 \text{ cifras}})^2$

A) 900 B) 925 C) 625 D) 90 E) 907

13. Halla la suma de cifras del resultado de:
$P = (\underbrace{666...6}_{500 \text{ cifras}})^2$

A) 500 B) 600 C) 5400
D) 4500 E) 4800

14. Efectúa: $E = \sqrt{200 \,.\, 201 \,.\, 202 \,.\, 203 + 1}$

A) 40 600 B) 40 601 C) 40 602
D) 40 603 E) 40 604

15. A una hoja cuadrada y cuadriculada con 100 cuadraditos por lado, se traza una diagonal principal. ¿Cuántos triángulos como máximo podrán contarse en total?

A) 10 200 B) 10 000 C) 10 500
D) 10 100 E) 10 400

16. Calcula la suma de cifras del resultado de:

$M = [\underbrace{\overline{(a+2)(a+3)\,...\,(a+3)}}_{101 \text{ cifras}} - \underbrace{\overline{(a-3)(a-3)\,...\,(a-3)}}_{101 \text{ cifras}}]^2$

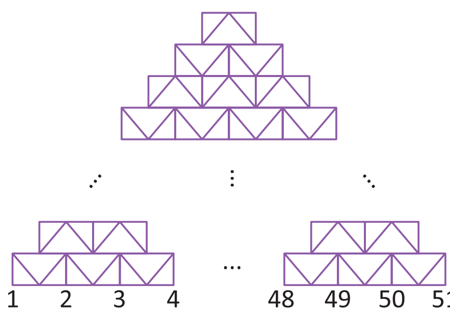
A) 520 B) 909 C) 725
D) 440 E) 640

17. Calcula el valor de $2x + 5$, si $x \in \mathbb{Z}^+$ y además:

$5(2x^2 + 30) + \sqrt{10(15 + x^2)} = 420$

A) 15 B) 17 C) 16 D) 20 E) 18

18. ¿Cuántos triángulos se pueden contar como máximo, en la siguiente figura?



A) 5325 B) 5425 C) 5300
D) 5250 E) 5050

19. Calcula: $(A - M - N)^{1997}$

Si se sabe que: $\overline{1A} + \overline{2A} + \overline{3A} + ... + \overline{9A} = \overline{MN1}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

20. Calcula la suma de cifras del resultado de:

$$R = (\underbrace{11\,1...1\,1}_{25\text{ cifras}} + \underbrace{222...22}_{25\text{ cifras}} + \underbrace{333...33}_{25\text{ cifras}})^2$$

A) 230 B) 215 C) 235
D) 240 E) 225

NIVEL 3

21. Halla la suma de cifras del resultado de:

$$P = (\underbrace{333...333}_{100\text{cifras}})^2$$

A) 400 B) 500 C) 2600
D) 800 E) 900

22. Determina el número total de bolitas sombreadas que habría en la fig. 10.

UNMSM 2010-I

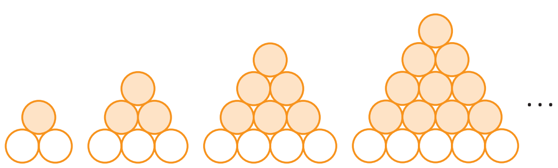


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 ...

A) 65 B) 40 C) 42
D) 60 E) 55

23. ¿De cuántas formas diferentes se puede leer la palabra KARINA?

K
A A
R R R
I I I I
N N N N N
A A A A A A

A) 16 B) 32 C) 64
D) 96 E) 128

24. En el siguiente arreglo, calcula la suma de todos los términos hasta F_{10}.

$F_1 \rightarrow$ 1
$F_2 \rightarrow$ 2 3
$F_3 \rightarrow$ 4 5 6
$F_4 \rightarrow$ 7 8 9 10
⋮

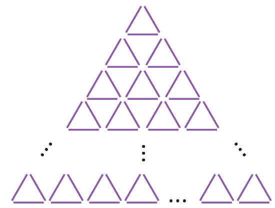
A) 1505 B) 1510 C) 1520
D) 1540 E) 1580

25. Calcula la suma de cifras del resultado de:

$$A = (\underbrace{555...55}_{30\text{ cifras}})^2 - (\underbrace{444...44}_{30\text{ cifras}})^2$$

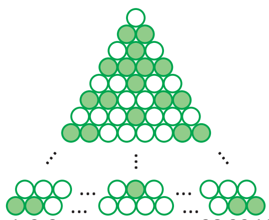
A) 300 B) 270 C) 900
D) 180 E) 210

26. ¿Cuántos palitos se emplearon para construir el siguiente arreglo?



A) 3600 B) 3675 C) 2550
D) 4725 E) 2625

27. En el siguiente triángulo, ¿cuántas bolitas no sombreadas hay?



A) 2470 B) 4803 C) 3605
D) 2460 E) 4820

28. ¿Cuántos apretones de mano se producirán al saludarse las 40 personas asistentes a una reunión?

A) 740 B) 750 C) 780
D) 785 E) 790

29. Calcula la suma de cifras del resultado de:

$$E = (\underbrace{777...77}_{n \text{ cifras}} + \underbrace{222...225}_{(n-1) \text{ cifras}})^2$$

A) 77 B) 25 C) 19
D) 52 E) 102

30. Halla la última cifra de R.

$$R = 15^{28} + 333^{16} + 4^{23}$$

A) 1 B) 6 C) 5
D) 3 E) 0

Claves

NIVEL 1	9. A	17. A	25. B
1. C	10. A	18. E	26. B
2. D	NIVEL 2	19. B	27. B
3. E	11. B	20. E	28. C
4. B	12. E	NIVEL 3	29. C
5. B	13. D	21. E	30. E
6. B	14. B	22. E	
7. B	15. D	23. B	
8. C	16. B	24. D	

Cuadrados mágicos

DEFINICIÓN

Son arreglos de números que satisfacen la condición de que la suma de los números ubicados en las filas, columnas y las dos diagonales es constante. A este valor constante se le denomina constante mágica o suma mágica.

Ejemplos:

21	11	25	→ 57
23	19	15	→ 57
13	27	17	→ 57

Diagonales y columnas: 57 57 57 57 57

1	34	22	37	→ 94
43	16	28	7	→ 94
40	19	31	4	→ 94
10	25	13	46	→ 94

Diagonales y columnas: 94 94 94 94 94 94

Halla la constante mágica luego de distribuir los números del 1 al 16 en el siguiente cuadrado mágico.

Resolución:

				→ S
				→ S
				→ S
				→ S

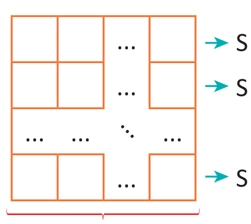
Los números a distribuir suman 4S

$4S = 1 + 2 + 3 + ... + 16$

$4S = \dfrac{16 \times 17}{2}$

$\Rightarrow S = 34$

En general: sean los números a distribuir 1; 2; 3; ...; n^2



n casillas por lado

Todos los números suman ns

$ns = 1 + 2 + 3 + ... + n^2$

$$ns = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

La constante mágica es:

$$S = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

Nota

Al número de casillas por lado se denomina **orden**, en el ejemplo se muestran dos cuadrados mágicos uno de orden 3 cuya suma mágica es 57 y otro de orden 4 cuya suma mágica es 94.

Observación

Hallamos el valor de la constante mágica en un cuadrado mágico de orden 5 que se completa con los números enteros del 1 al 25.

					→ S
					→ S
					→ S
					→ S
					→ S

$5S = 1 + 2 + 3 + ... + 25$

$5S = \dfrac{25 . 26}{2}$

$S = 65$



Nota

En el siguiente cuadrado mágico de orden 3, halla la constante mágica.

8	1	6	→ S
3	5	7	→ S
4	9	2	→ S

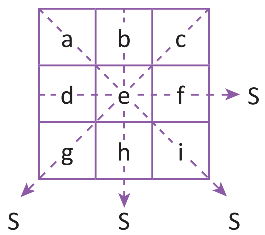
Orden

$S = \dfrac{3(3^2+1)}{2} = \dfrac{3 \times 10}{2}$

$S = 15$

PROPIEDADES DE LOS CUADRADOS MÁGICOS

- En todo cuadrado mágico de orden 3 la constante mágica es igual a tres veces el término central.

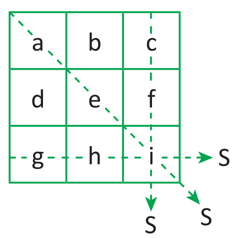


Según el gráfico:

$$\underbrace{(a+e+i)+(g+e+c)+(b+e+h)+(d+e+f)}_{4S}=3S+3e$$

$$4S = 3S + 3e$$
$$S = 3e$$

- El número ubicado en cada vértice de un cuadrado mágico de orden 3 es la semisuma de los dos números que están en contacto con su vértice opuesto.



Según el grafico:

$$\left.\begin{aligned} a+e+i&=S\\ c+f+i&=S\\ g+h+i&=S \end{aligned}\right\}(+)$$

$$f+h+c+g+2i=2S \qquad ...(1)$$
$$S=a+e+i \qquad ...(2)$$

Sumamos (1) y (2):

$$f+h+2e+i=S+a+e$$
$$f+h+e+i=(a+e+i+a)$$
$$f+h=2a$$
$$a=\frac{f+h}{2}$$

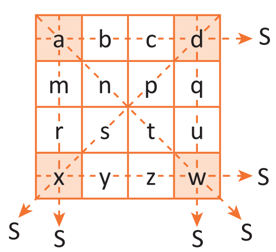
También se cumple: $c=\frac{d+h}{2}$ $\quad g=\frac{b+f}{2}$ $\quad i=\frac{d+b}{2}$

- En todo cuadrado mágico de orden 3 el menor y el mayor de los números se encuentran en los lados laterales no esquineros.

	2a	
		2b
a+b		

No es el mayor ni el menor → a+b

- En todo cuadrado mágico de orden 4, la suma de los números ubicados en los vértices es igual a la constante mágica.



Según el gráfico:

$$(a+b+c+d)+(a+m+r+x)+(d+q+u+w)+$$
$$(x+y+z+w)+(a+n+t+w)+(x+s+p+d)=6S$$

$$4S+2(a+d+x+w)=6S$$
$$2(a+d+x+w)=2S$$
$$S=a+d+x+w$$

Importante

En todo cuadrado mágico aditivo de orden 3 el número que se ubica en la casilla central es la semisuma de los números que se ubican en dos casillas simétricas, respecto a dicha casilla central.

$e=\frac{a+i}{2}$ $\quad e=\frac{c+g}{2}$

$e=\frac{b+h}{2}$ $\quad e=\frac{d+f}{2}$



Nota

Dado el cuadrado mágico aditivo. Halla el valor de $a \times b$

	12	7
	b	10
a		

Resolución:

Del gráfico: $a=\frac{12+10}{2}$

$a = 11$

También: $b=\frac{a+7}{2}$

$b = 9$

$\therefore\ a \times b = 99$



Recuerda

En todo cuadrado mágico aditivo de orden 4 se cumple:

a	b	c	d	→ S
e	f	g	h	→ S
m	n	p	q	→ S
x	y	z	w	→ S

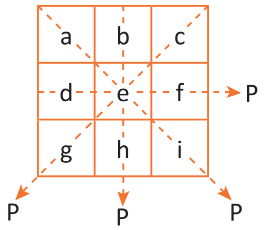
$S = b + c + y + z$

$S = e + m + h + q$

CUADRADO MÁGICO MULTIPLICATIVO

Son aquellos arreglos de números que cumplen la condición de que el producto de los números ubicados en las filas, columnas y las dos diagonales es constante. El cuadrado mágico multiplicativo cumple propiedades similares al cuadrado mágico aditivo.

- En todo cuadrado mágico multiplicativo de orden 3 la constante mágica es igual al cubo del término central.



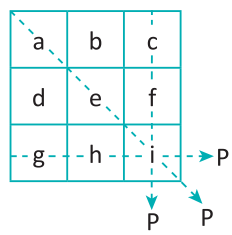
Según el gráfico:

$$(a \,.\, e \,.\, i)(g \,.\, e \,.\, c)(b \,.\, e \,.\, h)(d \,.\, e \,.\, f) = P \,.\, P \,.\, P \,.\, e^3$$

$$P^4 = P^3 \,.\, e^3$$

$$P = e^3$$

- En todo cuadrado mágico multiplicativo de orden 3 el número ubicado en cada vértice es la raíz cuadrada del producto de los dos números que están en contacto con su vértice opuesto.



Según el gráfico:

$$a \,.\, e \,.\, i = P$$

$$\left.\begin{aligned} c \,.\, f \,.\, i &= P \\ g \,.\, h \,.\, i &= P \end{aligned}\right\} (\times)$$

$$f \,.\, h \,.\, c \,.\, g \,.\, i^2 = P^2 \qquad ...(1)$$

$$P = a \,.\, e \,.\, i \qquad ...(2)$$

Multiplicamos (1) y (2):

$$f \,.\, h \,.\, e^2 \,.\, i = P \,.\, a \,.\, e$$

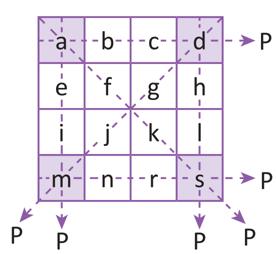
$$f \,.\, h \,.\, e \,.\, i = a \,.\, e \,.\, i \,.\, a$$

$$f \,.\, h = a^2$$

$$a = \sqrt{f \,.\, h}$$

También se cumple: $c = \sqrt{d \,.\, h}$ $g = \sqrt{b \,.\, f}$ $i = \sqrt{b \,.\, d}$

- En todo cuadrado mágico multiplicativo de orden 4 el producto de los números ubicados en los vértices es igual a la constante mágica.



Según el gráfico:

$$\left.\begin{aligned} a \,.\, b \,.\, c \,.\, d &= P \\ a \,.\, e \,.\, i \,.\, m &= P \\ d \,.\, h \,.\, l \,.\, s &= P \\ m \,.\, n \,.\, r \,.\, s &= P \\ a \,.\, f \,.\, k \,.\, s &= P \\ d \,.\, g \,.\, j \,.\, m &= P \end{aligned}\right\} (\times)$$

$$P \,.\, P \,.\, P \,.\, P \,.\, a^2d^2m^2s^2 = P^6$$

$$P^4a^2d^2m^2s^2 = P^6$$

$$a^2d^2m^2s^2 = P^2$$

$$P = a \,.\, d \,.\, m \,.\, s$$

Importante

En todo cuadrado mágico multiplicativo de orden 3 el número que se ubica en la casilla central es igual a la raíz cuadrada del producto de los números ubicados en dos casillas simétricas respecto a dicha casilla central.

$e = \sqrt{a \,.\, i}$ $e = \sqrt{c \,.\, g}$

$e = \sqrt{b \,.\, h}$ $e = \sqrt{d \,.\, f}$



Nota

En el cuadrado mágico multiplicativo, halla el valor de a + b.

	100	2
4		a
50	b	

Resolución:

$50 = \sqrt{100 \,.\, a}$; $2 = \sqrt{4 \,.\, b}$

$2500 = 100a$; $4 = 4b$

$a = 25$; $b = 1$

$\therefore a + b = 26$

Recuerda

En todo cuadrado mágico multiplicativo de orden 4 se cumple:

a	b	c	d	→ P
e	f	g	h	→ P
i	j	k	l	→ P
m	n	r	s	→ P

$b \,.\, c \,.\, n \,.\, r = P$

$e \,.\, i \,.\, h \,.\, l = P$



Problemas resueltos

1 El siguiente cuadrado mágico, está compuesto por números múltiplos de 5, excepto 0, calcula A + B + C.

20	B	10
A	25	C
40	5	30

Resolución:

Por propiedad: $\frac{B+C}{2} = 40 \Rightarrow B + C = 80$

También: $S = 20 + 25 + 30 \Rightarrow S = 75$

Luego: $20 + A + 40 = 75$

$A + 60 = 75 \Rightarrow A = 15$

Finalmente: $A + B + C = 15 + 80 = 95$

2 En el cuadrado mágico del gráfico. Si las letras x; y; z representan números, halla $x^2 + z^2$.

4	3x	z
x	5	7y
4z	y	6

Resolución:

Por propiedad: $\frac{x+3x}{2} = 6 \Rightarrow \frac{4x}{2} = 6 \Rightarrow x = 3$

También: $\frac{4z+z}{2} = 5 \Rightarrow \frac{5z}{2} = 5 \Rightarrow z = 2$

$\therefore\ x^2 + z^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

3 En el cuadrado mágico que se muestra, ¿cuál es el valor de A?

15		35
25	A	

Resolución:

El término central es: $\frac{25+35}{2} = 30$

La suma constante es: $S = 25 + 30 + 35$

$S = 90$

15	◯	35
	30	
25	A	

Además: $90 = 15 + 35 + ◯$

$90 = 50 + ◯$

$◯ = 40$

Finalmente: $A + 30 + ◯ = 90$

$A + 30 + 40 = 90$

$A + 70 = 90$

$\therefore\ A = 20$

4 El siguiente cuadrado mágico está conformado por números enteros positivos. Calcula el valor de y – x.

	9	4
x		y
12		

Resolución:

Por propiedad: $\frac{9+y}{2} = 12 \Rightarrow 9 + y = 24$

$\Rightarrow y = 15$

El término central es: $e = \frac{12+4}{2} \Rightarrow e = 8$

Finalmente: $S = x + e + y$

$24 = x + 8 + 15$

$24 = x + 23 \Rightarrow x = 1$

$\therefore\ y - x = 15 - 1 = 14$

5 Se tiene el siguiente cuadrado mágico multiplicativo, que se completa con números enteros positivos. Halla el valor de x.

x		8	2
	4		4
			x
	1	4	

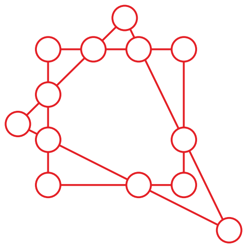
Resolución:

Sea t el número que falta en la primera fila.

Por propiedad: $x . 8 . 2 . t = 8 . 1 . 4 . t$

$\therefore\ x = 2$

6 Distribuye los números del 1 al 13 tal que la suma de los números ubicados en círculos colineales, unidos por una línea, sea la misma. Calcula la suma constante.



Resolución:

Se observa que dicha suma constante se encuentra 7 veces y cada círculo 2 veces.

Luego: $7S = 2(1 + 2 + 3 + ... + 13)$

$7S = 2 \times \dfrac{13 \times 14}{2}$

$7S = 13 \times 14$

$\therefore S = 26$

7 En el cuadrado mágico multiplicativo se distribuye los números 2; 4; 8; 16; ...

Si $a \times b \times c \times d = 2^x$, calcula x.

			d
		c	
	b		
a			

Resolución:

Los números a distribuir son: $2; 2^2; 2^3; ...; 2^{16}$

Sabemos que: $P = a . b . c . d \wedge a . b . c . d = 2^x$

$\Rightarrow P = 2^x$

El producto de los números de cada fila es igual a la constante mágica.

$P . P . P . P = 2 \times 2^2 \times 2^3 \times ... 2^{16}$

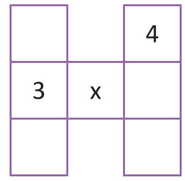
$P^4 = 2^{8 \times 17}$

$(2^x)^4 = 2^{8 . 17}$

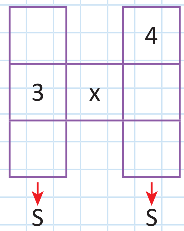
$2^x = 2^{34}$

$\therefore x = 34$

8 En el gráfico distribuye los números del 1 al 7, uno en cada casilla, de modo que la suma de los números ubicados en cada una de las tres líneas (dos verticales y una horizontal) sea la misma. Halla el valor de x.



Resolución:



Del gráfico:

$2S + x = 1 + 2 + 3 + ... + 7$

$2S + x = 28$

par par par

$S = 13, \ x = 2$ (No cumple)

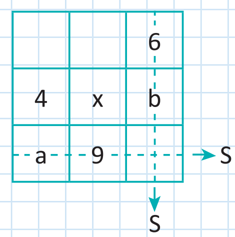
$S = 11, \ x = 6$ ✓

$\therefore x = 6$

9 El siguiente gráfico corresponde a un cuadrado mágico multiplicativo. Si a + b = 15, calcula la constante mágica y da como respuesta la suma de cifras.

		6
4		b
a	9	

Resolución:



Del gráfico: $3a = 2b$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{2k}{3k}$

Por dato: $a + b = 15$

$2k + 3k = 15$

$5k = 15 \Rightarrow k = 3$

Luego: $a = 6; b = 9$

También: $x = \sqrt{6 . a}$

$x = \sqrt{6 . 6}$

$x = 6$

Finalmente: $P = 4 . x . b = 4 . 6 . 9 = 216$

$\therefore$ Suma de cifras $= 2 + 1 + 6 = 9$

1. En el siguiente cuadrado mágico, las letras a; b y c representan números. Halla $a^2 + b^2 + c^2$.

c	7b	18
3a	15	b
12	a	4c

A) 116 B) 96 C) 126 D) 124 E) 114

2. El siguiente cuadrado mágico está compuesto por números múltiplos de 6, excepto el cero, calcula: $x + y + z$

12	y	36
z	30	x
24	18	48

A) 92 B) 104 C) 108 D) 102 E) 112

3. En el gráfico distribuye los números pares del 2 al 14, uno en cada casilla, de manera que la suma de los números ubicados en cada una de las tres líneas (dos verticales y una horizontal) sea la misma. Halla el valor de x.

	6	
	x	
		8

A) 12 B) 10 C) 14 D) 6 E) 8

4. En el cuadrado mágico multiplicativo se distribuye los números 3; 9; 27; ...
Si $m \times n \times p \times q \times r = 3^x$. Calcula x.

				r
			q	
		p		
	n			
m				

A) 55 B) 65 C) 45 D) 35 E) 60

5. En el siguiente cuadrado mágico que se muestra, halla el valor de $\sqrt{a - b}$.

12	a	
		11
	b	18

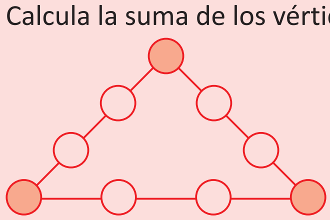
A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 2

6. Se muestra un cuadrado mágico de orden 3, que se completa con los números 1; 3; 5; 8; 10; 12; 15; 17; 19. Calcula el valor de A – B + C – D + E.

A		B
	C	
D		E

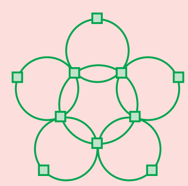
A) 12 B) 8 C) 14 D) 10 E) 6

7. Distribuye los números del 7 al 15, de manera que los números en cada lado del triángulo sumen 44. Calcula la suma de los vértices.



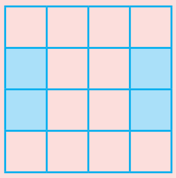
A) 35 B) 33 C) 31 D) 37 E) 39

8. Distribuye los números impares del 1 al 19 en los casilleros del gráfico mostrado de manera que la suma de los números ubicados en cada círculo sea la misma. Halla el valor de dicha suma constante.



A) 27 B) 23 C) 25 D) 29 E) 31

9. Con los 16 primeros números pares se forma un cuadrado mágico de orden 4. Determina la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas.



A) 80 B) 60 C) 64 D) 76 E) 68

10. Se tiene el siguiente cuadrado mágico, en el que el producto de los números ubicados en cada fila, columna o diagonal da un mismo resultado. Halla el valor de m + n.

2		8	2
	4		4
		m	2
n	1	4	a

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 5

11. En el gráfico se muestra dos cuadrados mágicos de orden 4, que al intersecarse forman un cuadrado mágico de orden 3. Halla el valor de a + b + c + d + e + f.

a			b	
	m	y		d
	x	9	z	
c		w	n	
	e			f

A) 56 B) 54 C) 60 D) 45 E) 36

12. El gráfico muestra un cuadrado mágico multiplicativo. Halla 3x.

	6		3
2	a	8	
6		4	8
8	2x		b

A) 8 B) 6 C) 4 D) 10 E) 12

13. Calcula el producto de las constantes mágicas de los dos cuadrados mágicos de orden 3 que se completa con números enteros.

	7	8		
3	b			
a		c		
		7	e	
			1	d

A) 720 B) 960 C) 760 D) 820 E) 840

14. En el gráfico se muestran 2 cuadrados mágicos uno de orden 3 y otro de orden 4, con la misma constante mágica. Si en cada casillero se debe ubicar números enteros, halla el valor de a + b + c + d.

3		1	d	
	c		2	
5			z	13
a	b	x	y	
			14	8

A) 25 B) 23 C) 21 D) 28 E) 24

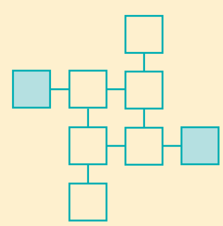
Claves

1. C	5. E	9. E	13. A
2. D	6. D	10. C	14. B
3. A	7. B	11. B	
4. B	8. C	12. A	

Reto



Distribuye los números del 1 al 8 en las casillas de tal manera que la suma de los números en 3 casillas colineales sea la misma y la menor posible.
Da como respuesta la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas.



Rpta.: 12

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Determina el valor de: x + y + z + w, si el siguiente gráfico es un cuadrado mágico de orden 3.

3	y	4
x		w
1	z	2

A) 5 B) 11 C) 10 D) 12 E) 9

2. Determina el valor de: A + B + C + D, si el siguiente gráfico es un cuadrado mágico de orden 3.

3/2	C	1/4
B		D
7/4	A	1/2

A) 2 B) 10 C) 8 D) 4 E) 6

3. Halla el valor de a + b + c en el siguiente cuadrado mágico.

10	0	14
12	a	x
2	b	c

A) 32 B) 30 C) 25 D) 38 E) 26

4. En el siguiente cuadrado mágico, halla el valor de a + b + c.

11	b	c
13	a	y
3	17	7

A) 27 B) 32 C) 35 D) 25 E) 29

5. En el siguiente cuadrado mágico, se distribuye los 9 primeros números naturales. Calcula el valor de a + b + c.

a		
	b	
		c

A) 16 B) 20 C) 15 D) 22 E) 17

6. En el siguiente cuadrado mágico, se distribuye los números del 5 al 13. Calcula el valor de m + n + p.

m	n	p

A) 20 B) 22 C) 23 D) 25 E) 27

7. En el siguiente cuadrado mágico, se distribuye los números naturales del 10 al 18. Calcula el valor de a + b + c.

		a
		b
		c

A) 42 B) 38 C) 44 D) 40 E) 36

8. En el cuadrado mágico que se muestra. ¿Cuál es el valor de A?

10		30
20	A	

A) 9 B) 12 C) 15 D) 17 E) 10

9. En el cuadrado mágico que se muestra, ¿cuál es el valor de x?

12	x	
24		48

A) 36 B) 42 C) 40 D) 35 E) 38

10. En el cuadrado mágico que se muestra, ¿cuál es el valor de a?

6		
		a
12		24

A) 5 B) 4 C) 2 D) 3 E) 7

NIVEL 2

11. El siguiente cuadrado mágico está conformado por números enteros positivos. Calcula el valor de a + b.

	18	16
a		b
12		

A) 19 B) 17 C) 20 D) 38 E) 28

12. En el siguiente cuadrado mágico que se muestra, halla el valor de x + y.

5	x	
		2
	y	23

A) 29 B) 23 C) 28 D) 25 E) 20

13. En el siguiente cuadrado mágico que se muestra, halla el valor de a – b.

	15	13
a		b
9		

A) 18 B) 14 C) 12 D) 20 E) 16

14. En el siguiente cuadrado mágico, que se forma al distribuir los 9 primeros números pares, excepto el 0. Calcula el valor de z, si x + y = 12.

x		
		z
y		

A) 2 B) 7 C) 3 D) 5 E) 1

15. En el siguiente cuadrado mágico que se forma al distribuir los 9 primeros múltiplos de 4, excepto 0. Calcula el valor de a, si b + c = 48.

	a	
b		c

A) 25 B) 26 C) 22 D) 28 E) 20

16. En el siguiente cuadrado mágico que se forma al distribuir los 9 primeros múltiplos de 3, excepto 0. Calcula x + y.

	x	
27	e	y
	9	

A) 30 B) 26 C) 24 D) 28 E) 22

17. En el siguiente cuadrado mágico que se forma al distribuir los números impares del 11 al 27. Calcula a – b.

	23	
27	e	b
	a	

A) 4 B) 3 C) 5 D) 7 E) 2

18. El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla el valor de a + b + c.

13	23	21
27	a	b
17		c

A) 60 B) 55 C) 50 D) 53 E) 52

19 El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla el valor de x + y + z.

12	10	20
y	z	6
x		16

A) 42 B) 38 C) 44 D) 46 E) 30

20 El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla m.

3m–6		
		m + n
	m – n	

A) 2 B) 4 C) 3 D) 6 E) 5

NIVEL 3

21 El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla el valor de a.

3a		14
2		5a

A) 3 B) 5 C) 6 D) 2 E) 4

22 El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla x + y + z.

z + 3	x	4x – 2
3x	2x + 1	z
x + 1	z + 6	y + 5

A) 9 B) 12 C) 11 D) 8 E) 10

23 Si las casillas del siguiente cuadrado se completan con números enteros positivos, de manera que se obtenga un cuadrado mágico multiplicativo, ¿cuál es el valor de a?

5		a
	1	20

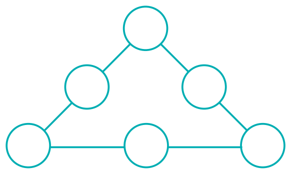
A) 10 B) 2 C) 6 D) 8 E) 4

24 Ubica los números 2; 4; 6; ...; 32 en cada casillero, de tal forma que se obtenga un cuadrado mágico. Calcula el valor de a – x + b – y + c – z + d – w.

a			b
	x	y	
	z	w	
c			d

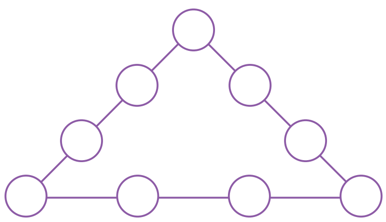
A) 0 B) 7 C) 3 D) 1 E) 2

25. Distribuye los números impares desde el 1 al 11 en los círculos, de tal modo que le suma de los números en los lados del triángulo sean 13, 15 y 17. Da como respuesta la suma de los números que se ubican en los vértices del triángulo.



A) 6 B) 8 C) 7 D) 5 E) 9

26. En el gráfico distribuye los números pares del 2 al 18, de tal manera que la suma de cada lado del triángulo sea la misma. Da como respuesta la mayor suma.



A) 46 B) 47 C) 50 D) 45 E) 48

27. En el siguiente cuadrado mágico deben estar todos los números impares desde el 1 al 31. Da como respuesta el valor de N $\times$ M.

25		N	
	21	13	27
5	M	11	29

A) 420 B) 422 C) 453 D) 463 E) 437

28. El gráfico muestra un cuadrado mágico multiplicativo. Calcula el valor de 3a.

	6		3
2		8	
6		4	8
8	2a		

A) 7 B) 5 C) 4 D) 8 E) 6

29. Se tiene el siguiente cuadrado mágico, el cual se completa con los 9 primeros números primos. Halla la suma de los números ubicados en los casilleros sombreados.

			33
			24
			43
28	33	39	59

A) 25 B) 18 C) 16 D) 27 E) 20

Claves

NIVEL 1	9. B	17. A	25. E
1. C	10. D	18. B	26. A
2. D	NIVEL 2	19. C	27. E
3. B	11. E	20. C	28. D
4. D	12. C	NIVEL 3	29. D
5. C	13. E	21. D	
6. E	14. A	22. A	
7. A	15. D	23. B	
8. C	16. C	24. A	

UNIDAD 2



El gen de la estatura

La extraordinaria altura de Sultan Kösen (246,5 cm) o He Pingping de (74,6 cm) no dependen de un solo gen. El número de variantes genéticas que afectan a la estatura humana asciende a más de un millar, según revela un estudio internacional publicado en la revista Nature, donde de momento se identifican solo 180.

La estatura es un rasgo complejo, que depende aproximadamente en un 80% de la genética y en un 20% de factores ambientales como la dieta. Para identificar los genes de la altura, el nuevo estudio llamado GIANT (gigante en inglés), ha contado con la participación de 300 investigadores procedentes de un centenar de instituciones de varios países, que han analizado muestras de ADN de 185 000 individuos en busca de variantes genéticas o polimorfismos (minúsculas variaciones en los nucleótidos del genoma). Y han encontrado 180 asociadas a la talla. Algunas de esas variantes genéticas están relacionadas con la densidad mineral de los huesos y con enfermedades como la osteoporosis, la psoriasis, la diabetes o la obesidad.

Matemática recreativa

Tres amigos inseparables

Tres amigos: Anibal, Benito y Claudio, se encuentran con sus respectivas mascotas: un perro, un gato y un hamster, ante un río que se proponen atravesar. Solo disponen de una pequeña embarcación, apta para transportar únicamente a dos personas o a una persona y una mascota a la vez. ¿Cómo cruzarán los tres amigos y sus mascotas de manera que ninguna mascota quede en compañía de dos dueños, si su dueño no está presente?





Operadores matemáticos

OPERACIÓN MATEMÁTICA

Atención

Las operaciones matemáticas que se observan en el cuadro son universalmente conocidas, es decir, que cualquier matemático del mundo al ver la siguiente operación: $\log_2 8$, sabe que el resultado es 3.



Es aquel procedimiento que transforma una o más cantidades en otra cantidad llamada resultado, bajo ciertas reglas y/o condiciones convenidas. Toda operación matemática tiene un símbolo que la representa llamado operador matemático.

Operación matemática	Operador matemático
Adición	$+$
Sustracción	$-$
Multiplicación	$\times$
División	$\div$
Radicación	$\sqrt{\ }$
Logaritmación	log
Sumatoria	Σ
Productoria	Π
Valor absoluto	$\lvert\ \rvert$
Máximo entero	$[\![\ ]\!]$
Límite	lím
Integración	$\int$



Recuerda

La regla de definición nos indica la secuencia de operaciones matemáticas que se deben realizar con los componentes que se operan.

Las operaciones matemáticas y sus respectivos operadores mostrados en el cuadro de arriba, son universalmente conocidas; lo que haremos ahora será establecer otras operaciones matemáticas, con su respectiva regla de definición basándonos en las operaciones matemáticas ya conocidas.

Estas nuevas operaciones matemáticas a definir tendrán una regla de definición arbitraria en donde se hará uso de otros operadores matemáticos para representarlas, como por ejemplo: $*$, #, $\triangledown$, $\triangle$, $\square$, $\sqsubset\!\sqsupset$, $\bigcirc$, @, θ, etc.

Ejemplo:

Se define la operación: $r\,\theta\,s = r^2 + s^2 - rs$

Veamos:

$$r\,\theta\,s = \underbrace{r^2 + s^2 - rs}_{\text{Regla de definición}}$$

- θ → Operador
- $r^2 + s^2 - rs$ → Regla de definición
- s → 2.ª componente
- r → 1.ª componente

Problemas resueltos

1 Se define: $\boxed{x} = x(x+1) - x(x-1)$

Calcula: $S = \dfrac{\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\ldots+\boxed{22}}{\boxed{10}+\boxed{9}+\boxed{8}+\ldots+\boxed{1}}$

Resolución:

$\boxed{x} = x(x+1) - x(x-1)$
$= x(x+1-x+1)$
$\boxed{x} = 2x$

Luego:

$S = \dfrac{\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\ldots+\boxed{22}}{\boxed{10}+\boxed{9}+\boxed{8}+\ldots+\boxed{1}}$

$S = \dfrac{2(1)+2(2)+2(3)+\ldots+2(22)}{2(10)+2(9)+2(8)+\ldots+2(1)}$

$S = \dfrac{2(1+2+3+\ldots+22)}{2(10+9+8+\ldots+1)}$

$S = \dfrac{\frac{22(23)}{2}}{\frac{10(11)}{2}} = \dfrac{46}{10} = 4,6$

2 Se define:

$\begin{array}{|c|}\hline \sqrt{b} \\ \hline a \\ \hline\end{array} = a^2 \times \sqrt[4]{b}$

Calcula: $\begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline 9 \\ \hline \sqrt{2} \\ \hline\end{array}$

Resolución:

De la definición:

$\begin{array}{|c|}\hline \sqrt{b} \\ \hline a \\ \hline\end{array} = a^2 \times \sqrt[4]{b}$

$\sqrt{\ }$ $\quad (\ )^2$

Luego:

$\begin{array}{|c|}\hline 9 \\ \hline \sqrt{2} \\ \hline\end{array} = (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$

Reemplazamos:

$\begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline 9 \\ \hline \sqrt{2} \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline\end{array} = 6^2 \times \sqrt{4} = 36 \times 2 = 72$

3 Si:

$5\sqrt{m} * 2\sqrt[3]{n} = 1+2+3+\ldots+\left(\dfrac{m+n}{3}\right)$

Calcula: $30 * 6$

Resolución:

Igualando las componentes se tiene:

$5\sqrt{m} = 30 \quad \wedge \quad 2\sqrt[3]{n} = 6$
$\sqrt{m} = 6 \qquad \sqrt[3]{n} = 3$
$m = 36 \qquad n = 27$

Reemplazamos:

$30 * 6 = 5\sqrt{36} * 2\sqrt[3]{27}$
$= 1+2+3+\ldots+\left(\dfrac{36+27}{3}\right)$
$= 1+2+3+\ldots+21$
$= \dfrac{21 \times 22}{2} = 21 \times 11 = 231$

4 Dado: $\boxed{a * b} = 2a - b$

$\triangle x = 6x + 7$

Halla "N" en:

$\triangle\boxed{N * 5} = 25$

Resolución:

De la definición:

$\triangle\boxed{N * 5} = 25$

$\times 6 \quad +7$

$6\,\boxed{N * 5} + 7 = 25$

$6\,\boxed{N * 5} = 18$

$\boxed{N * 5} = 3$

Luego:

$2N - 5 = 3$
$2N = 8$
$N = 4$

5 Si: $a \# b = \dfrac{(b \# a)^2}{5}$

Halla: $2 \# 3$

Resolución:

$a \# b = \dfrac{(b \# a)^2}{5} = \dfrac{\left(\dfrac{(a \# b)^2}{5}\right)^2}{5} = \dfrac{(a \# b)^4}{125}$

$$a \# b = \frac{(a \# b)^4}{125}$$

$(a \# b)^3 = 125$

$a \# b = 5$

Esto quiere decir que la regla de definición se reduce a una constante; luego, cualquiera que sean los valores de a y b el resultado siempre será 5.

Finalmente: $2 \# 3 = 5$

6 Si: $F(x + 3) = F(x) + 4$ y $F(8) = 2$

Calcula: $F(20)$

Resolución:

Tenemos:

$F(x + 3) = F(x) + 4$

Para $x = 8$:

$F(8 + 3) = F(8) + 4$

$F(11) = 2 + 4 = 6$

Para $x = 11$:

$F(11 + 3) = F(11) + 4$

$F(14) = 6 + 4 = 10$

Para $x = 14$:

$F(14 + 3) = F(14) + 4$

$F(17) = 10 + 4 = 14$

Para $x = 17$:

$F(17 + 3) = F(17) + 4$

$F(20) = 14 + 4 = 18$

Luego: $F(20) = 18$

7 Sabiendo que: $\textcircled{x} = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

calcula: $\textcircled{1{,}001}$

Resolución:

$\textcircled{x} = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2$

$\textcircled{x} = (x - 1)^3 + 2$

Reemplazamos:

$\textcircled{1{,}001} = (1{,}001 - 1)^3 + 2$

$= (0{,}001)^3 + 2$

$= 0{,}000000001 + 2$

$= 2{,}000000001$

8 Dada la siguiente tabla:

Δ	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Calcula:

$A = [(4 \Delta 3) \Delta (2 \Delta 1)] \Delta (3 \Delta 2)^2$

Resolución:

Según la tabla:

$A = [(4 \Delta 3) \Delta (2 \Delta 1)] \Delta (3 \Delta 2)^2$

$= [4 \Delta 4] \Delta 2^2$

$= 1 \Delta 4$

$= 2$

9 Si: $a * b = a - b + 2(b * a)$

Calcula: $12 * 3$

Resolución:

De la definición:

$a * b = a - b + 2(b * a)$ ...(I)

$b * a = b - a + 2(a * b)$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I):

$a * b = a - b + 2(b - a + 2(a * b))$

$a * b = a - b + 2b - 2a + 4(a * b)$

$a - b = 3(a * b)$

$a * b = \frac{a - b}{3}$

Piden: $12 * 3 = \frac{12 - 3}{3} = 3$

10 Si: $\triangle\!\!\triangle x = 4x + 3$

Halla: $\triangle 2$

Resolución:

Sea:

$\triangle x = ax + b$

$\triangle\!\!\triangle x = a(ax + b) + b$

$4x + 3 = a^2x + ab + b$

$4x + 3 = a^2x + b(a + 1)$

Igualamos:

$a^2 = 4 \wedge (a + 1)b = 3$

$a = 2 \wedge 3b = 3$

$b = 1$

Reemplazamos:

$\triangle x = ax + b$

$\triangle x = 2x + 1$

Piden: $\triangle 2 = 2(2) + 1 = 5$

Actividades de razonamiento

1. Si: $a\,\boxed{b}\,^{c} = \dfrac{a^2 - c^2}{5b}$

Además: $\Diamond b \Diamond = 2b$

Hallar: $2\,\boxed{\Diamond 3 \Diamond}\,^{3}$

A) 3 B) 3/2 C) –1/6 D) 5 E) 2/5

2. $\triangle x \triangle = \begin{cases} 2x + 3;\ x \leq 2 \\ 3x - 1;\ x > 3 \end{cases}$

Calcular: $E = \triangle{-1} + \triangle 4 - \triangle{-6}$

A) 18 B) 24 C) 25 D) 21 E) 20

3. Si:

$\boxed{x} = 2x + 5;\ \boxed{(x+1)} = x + 4$

Halla: $\big((4) - (-3)\big)$

A) 3/4 B) 2 C) 1 D) 2/5 E) 3

4. Si: $a * b = \underbrace{(a + b)(a + b)\ldots(a + b)}_{(a + b)\text{ veces}}$

Calcula: $E = [(a + b) * (a + b)]$

A) $(a + b)^2$ B) $[4(a + b)^2]^{(a + b)}$ C) $(a - b)^2$
D) $4(a + b)^{(a + b)^2}$ E) $(a + b)^{(a + b)}$

5. Si:

$P\left(\dfrac{x}{y}\right) = P(x) - P(y);$

Calcula: $\dfrac{P(9)}{P(3)}$

A) 25 B) 16 C) 2 D) 64 E) 9

6. Si: $f(1) = 1$; y $f(i + 1) = f(i) + 2i + 1$

Halla: $E = \dfrac{\sqrt{f(100)}}{\sqrt{f(10)}}$

A) 40 B) 10 C) 30 D) 20 E) 50

7. Se define:

$a * b = \dfrac{a^b + b^a}{a + b}$

Calcula:

$(((\ldots(((1 * 2) * 3) * 4) \ldots) * 1999) * 2000)$

A) 2000 B) 1999 C) 10 D) 1 E) 0

8. Sabiendo que: $(x) = ax + b$, además.

$((x)) = 8x + 21$

Halla: $((1)) + (1)$

A) 12 B) 10 C) 7 D) 15 E) 18

9. Dada la siguiente tabla:

*	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

Halla x en: [(x * b) * c] * (d * d) = (a * c) * b

A) a ∨ d B) d C) c D) a E) b

10. Se define la operación * mediante la siguiente tabla:

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	b	c	d	a
c	a	b	c	d
d	d	a	b	c

Halla x en: ((b * c) * x) * a = d

A) b B) a C) d D) c E) b ∨ c

11. Si:

$a \nabla b = \sqrt{\dfrac{a * b}{a - b}}$

$m * n = m + 2n$

Calcula: $E = \dfrac{8 \nabla 4}{2 \nabla 1}$

A) 5 B) 3 C) 4 D) 1 E) 2

12. Se define: $a * b = 2a\sqrt{b * a}$

Calcula: R = 1 * 27

A) 36 B) 24 C) 48 D) 72 E) 81

13. Si: ⓧ $\boxed{x+n} = x^2 - n^2$

$\boxed{2} = 1$

Halla: $\sqrt{n}$

A) 2/5 B) 1/4 C) $\sqrt{3}/2$ D) 3/2 E) 3/4

14. Si se cumple que:

$m \triangle n = 3(n \triangle m)^2$

Calcula: $(2 \triangle 3) \triangle 4$

A) 1/2 B) 1 C) 3 D) 1/3 E) 2

Claves

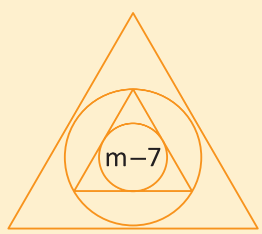
1. C
2. D
3. A
4. B
5. C
6. B
7. D
8. E
9. D
10. B
11. D
12. A
13. C
14. D

Reto



Se define: $\triangle x = \sqrt{x+1}$; $ⓧ = x^3$

Calcula el valor de "m" en la siguiente ecuación.



$= 2\sqrt{7}$

Rpta.: 9

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Halla x^2 si: $P \triangle Q = P^2 - 3Q$
   Además: $x \triangle 4 = 5 \triangle 2$

   A) 30 B) 28 C) 27 D) 36 E) 31

2. Si: $\left[\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}\right. = b(a - c)$

   Halla x: $\left[\begin{array}{l} 6\sqrt{2} \\ x \\ \sqrt{2} \end{array}\right. = 20$

   A) 7 B) 4 C) 2 D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{8}$

3. Se define: $a \triangle b = 2a + 3b$
   Halla x: $(x - 1) \triangle 4 = x^2 - 5$

   A) $5 \vee -3$ B) 2 C) 3 D) 5 E) -3

4. Si: $\textcircled{x} = ax + b$

   Además: $\textcircled{\textcircled{x}} = 4x + 6$

   Halla: $\textcircled{2} + \textcircled{\textcircled{2}}$

   A) 18 B) 20 C) 30 D) 15 E) 25

5. Sabiendo que: $a \, \theta \, b = ab - 2(b \, \theta \, a)$
   Calcula: $6 \, \theta \, 7$

   A) 16 B) 17 C) 18 D) 14 E) 15

6. Sabiendo que: $a \% b = (3a) \triangle (2b)$

   $m \triangle n = (4m) \psi (3n)$

   $x \psi y = 2x - y$

   Halla: $1 \% 2$

   A) 15 B) 13 C) 12 D) 16 E) 14

7. Si: $a^* = 2(a - 1)^* - (a - 2)^*$
   Además: $6^* = 5$ y $7^* = 4$
   Calcula: 9^*

   A) 6 B) 5 C) 4 D) 2 E) 3

8. Si: $(a * b) = \dfrac{a}{(b * a)^2}$

   Halla: $(2 * 4)$

   A) 0 B) 1 C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) 4

9. Si: $a^{\triangle} = \dfrac{(a - 2)^{\triangle}}{(a - 1)^{\triangle}}$

   Además: $0^{\triangle} = 4$

   $1^{\triangle} = 2$

   Halla: $3^{\triangle}$

   A) 1 B) 3 C) 2 D) 5 E) 4

10. Si se cumple: $m * n = 3(n * m) - (m + n)$
    Calcula: $7 * 9$

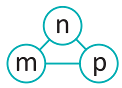
    A) 5 B) 8 C) 4 D) 6 E) 7

NIVEL 2

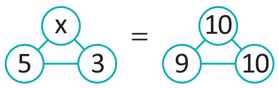
11 Si: $\boxed{x} = 3x - 1$; $\textcircled{x} = 2x + 8$

Halla: $\boxed{\textcircled{2a+1} - \textcircled{2a-1}}$

A) 7 B) 9 C) 10 D) 11 E) 13

12 Se define:  $= n^2 - mp$

Calcula x.



A) 2 o −2 B) 5 o −5 C) 3 o −3
D) 4 o −4 E) 8

13 Si: $\textcircled{a} = a(a + 1)$

Además: $\textcircled{\textcircled{x+2}} = 156$

Calcula: $\textcircled{x^3 - 5}$

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 14

14 Si: $\triangle_{x+4} = 4x - 2$

$\triangle_{\textcircled{x}} = 12x + 2$

Halla: $\textcircled{4}$

A) 17 B) 10 C) 20 D) 19 E) 15

15 Sabiendo que: $a \triangle b = a^2 + 2a$
además: $(m \square n) = (m \triangle n) + 1$
Calcula: $7 \square (5 \square (4 \square 3))$

A) 70 B) 64 C) 25 D) 36 E) 1

16 Si: $\boxed{x} = 4x - 3$; y $\boxed{\textcircled{x}} = 8x + 9$

Calcula: $\textcircled{\boxed{x}}$

A) 8x − 3 B) 8x + 3 C) 4x −5
D) 4x + 5 E) x + 1

17 Se define: $\sqrt{a} * b^3 = a - b^2$
Calcula: $E = (4 * 27) * (6\sqrt{2} * 512)$

A) 40 B) 32 C) 45 D) 30 E) 35

18 Si: $\textcircled{x-2} = x + 3$

Calcula: $\textcircled{\textcircled{\textcircled{40}}}$

A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 80

19 Si $x \triangle y = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, calcula:
$(2 \triangle 1) \triangle (1 \triangle 2)$

A) 1008 B) 1458 C) 1615
D) 1718 E) 1415

20 Si: $\triangle_{P} - 3 = P(P - 1)$

Calcula: $\triangle_{4} + \triangle_{\triangle_{2}}$

A) 3 B) 15 C) 23 D) 38 E) 46

21 Si: $\boxed{x} = 3x + 6$

$\boxed{\triangle\, x+1} = 3x - 6$

Calcula: $\triangle\, \boxed{10}$

A) 12 B) 28 C) 31 D) 67 E) 101

22 Se define en $\mathbb{Z}^+$: $\Diamond\, n\, \Diamond = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Calcula el valor de x en:

$\Diamond\Diamond\Diamond\, 3x-4\, \Diamond\Diamond\Diamond = 21$

A) 1/2 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5/2

23 Si: $a * b = 3(b * a) - ab$

Además: $\triangle\, m+2 = m - 2$

Calcula: $\triangle\, 6 * 4$

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 21

NIVEL 3

24 Si: $f(1) = 1$ y $f(i + 1) = f(i) + 2i + 1$

Halla: $M = \dfrac{\sqrt{f(50)}}{2}$

A) 20 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

25 Se define el siguiente operador:

$a \square b = a + b$; si a y b son pares

$a \square b = a \times b$; si a o b no es par

Halla: $\left[(1 \square 3) \square 6\right] \square 5$

A) 81 B) 90 C) 91 D) 93 E) 101

26 Si: $\sqrt{a} \triangle b^2 = 2\left(\sqrt{b} \triangle a^2\right) - ab$

Calcula: $E = \dfrac{\sqrt[4]{3} \triangle 2}{\sqrt{6}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

27 Se define en $\mathbb{N}$: $\boxed{a + 2} = a - 2$

Calcula: $\underbrace{\ldots\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{8}+8}+8}+8}\ldots}_{30 \text{ operadores}}$

A) 930 B) 900 C) 120 D) 780 E) 760

28 Se define: $a * b = a^2 - b^2$

Calcula el valor de:

$A = (\ldots ((((99 * 1)^{98*2})^{97*3})^{96*4})\ldots)^{1*99})$

A) 0 B)1 C) 99 D) 100 E) 98

29 Se define: $a * b = \dfrac{a^b + b^a}{a + b}$

Calcula: $(((((1 * 2) * 3) * 4) * 5) * 6) * 7)$

A) 1 B) 7 C) 28 D) 35 E) 0

30) Sabiendo que $\textcircled{x} = ax + b$, además:

$$\textcircled{\textcircled{\textcircled{x}}} = 16x + 75$$

Halla: $\textcircled{\textcircled{1}} + \textcircled{\textcircled{1}} + \textcircled{1} + 1$

A) 76 B) 72 C) 69 D) 70 E) 64

31) Si: $T_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$
Halla el valor de:

$(T_{10} - T_9) + (T_8 - T_7) + (T_6 - T_5) + (T_4 - T_3) + (T_2 - T_1)$

A) 57 B) 53 C) 51 D) 55 E) 59

32) Si: $\triangle x = \triangle(x - 1) + 2x + 1$; $\triangle 1 = 2$

Halla: $\triangle 20$

A) 420 B) 438 C) 422 D) 360 E) 439

33) Si: $\triangle(x - 3) = x + 7$

Calcula:

$A = \underbrace{...\triangle 15...}_{100 \text{ operadores}}$

A) 1015 B) 1005 C) 1000 D) 905 E) 915

34) Se define:

$$m \odot n = \begin{cases} 3m - 2n; & \text{si } m > n \\ 3n - 2m; & \text{si } n \geq m \end{cases}$$

Calcula: $M = \dfrac{(5 \odot 2)^2 \odot (1 \odot 2)}{5}$

A) 72 B) −71 C) 73 D) 71 E) −73

35) Si: $\boxed{\dfrac{n+1}{n-1}} = n$

Calcula: $\boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{7} \times ... \times \boxed{99}$

A) 25 B) 30 C) 45 D) 90 E) 50

36) Se define en la operación ∗ mediante la siguiente tabla:

∗	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	b	c	d	a
c	a	b	c	d
d	d	a	b	c

Si: $((b * c) * x) * a = d$

Calcula:

$\{(a * x) * (c * d)\} * x$

A) a B) b C) c D) d E) e

Claves

NIVEL 1	8. C	15. B	23. A	30. D
1. E	9. A	16. A	NIVEL 3	31. D
2. E	10. B	17. C	24. B	32. E
3. A	NIVEL 2	18. B	25. B	33. A
4. B	11. D	19. B	26. A	34. D
5. D	12. B	20. D	27. C	35. E
6. C	13. A	21. C	28. B	36. D
7. D	14. A	22. C	29. A	

Conteo de figuras

NOCIONES PREVIAS

Una figura puede ser simple o compuesta.

Figura simple

Es aquella que no contiene otras figuras en su interior.



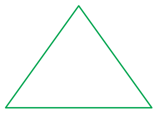
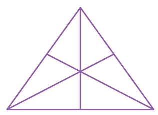


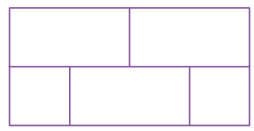


Figura compuesta

Es aquella que contiene figuras secundarias.

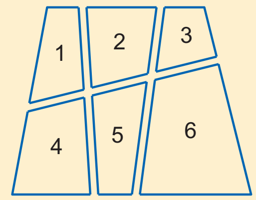






Recuerda

Las figuras simples son aquellas que se presentan de forma individual.





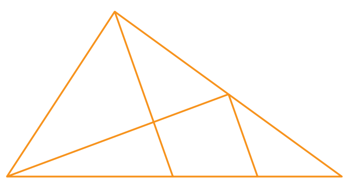
MÉTODOS DE CONTEO

Método de conteo directo

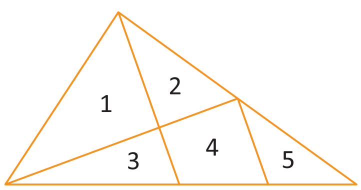
El conteo directo se realiza visualmente o por simple inspección y enumerando las figuras simples que conforman la figura principal; en este caso se dice que estamos contando por combinación.

Ejemplos:

- ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Resolución:



Con 1 número:	1; 2; 3; 5	4
Con 2 números:	12; 13; 34	3
Con 3 números:	245; 345	2
Con 5 números:	12345	1
		10 triángulos

Atención

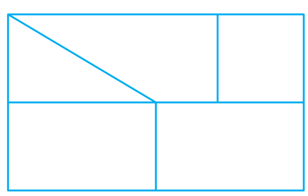
Este método consiste en asignar a cada una de las figuras interiores un número o letra. Luego se realiza el conteo indicando la figura pedida que tenga un número (letra), dos números (letras), y así sucesivamente.



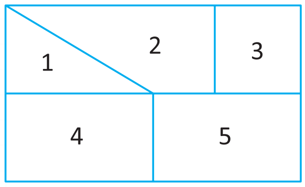
Recuerda

El método de conteo directo es el adecuado para figuras irregulares o figuras asimétricas, es decir, que no guardan cierta regularidad en sus partes.

- Indica el número total de cuadriláteros que hay en la siguiente figura.



Resolución:

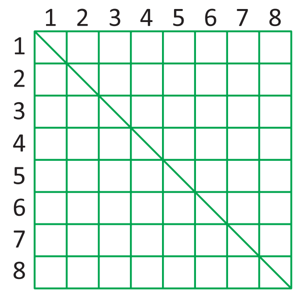


Con 1 número: 2; 3; 4; 5 — 4
Con 2 números: 12; 23; 14; 45 — 4
Con 3 números: 123 — 1
Con 5 números: 12345 — 1

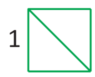
10 cuadriláteros

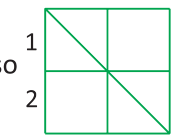
Método por inducción

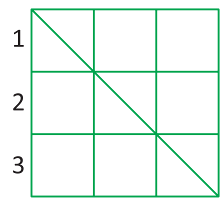
Ejemplo:
¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

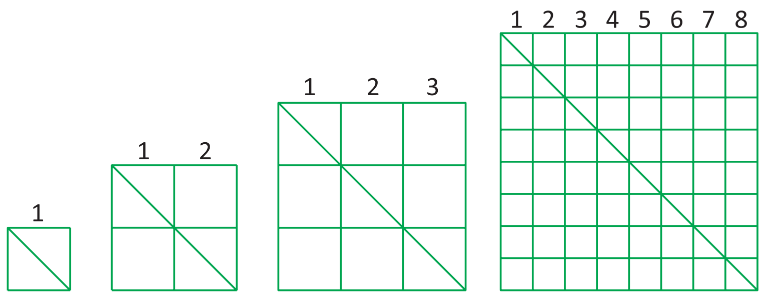


Resolución:
Aplicando inducción:

1.er caso  2 triángulos

2.° caso  6 triángulos

3.er caso  12 triángulos



2	6	12		
1×2	2×3	3×4	...	$8 \times 9 = 72$

$\therefore$ n.° total de triángulos = 72

Atención

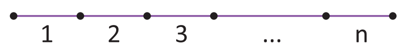
Para saber cuántos triángulos tiene la figura mostrada, podemos suponer que el tablero está formado por un solo cuadrado, luego por dos cuadrados por lado y así sucesivamente aumentamos el número de cuadrados.



Observación

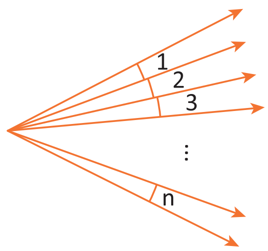
Lo que se está haciendo es trabajar por inducción, es decir, reducimos el problema a un caso más sencillo; luego complicamos poco a poco las situaciones y buscamos características que estén presentes en todos los casos.

Número de segmentos



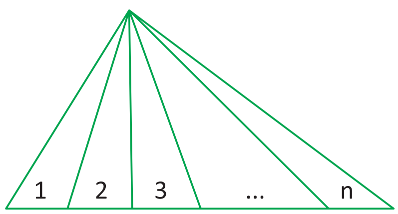
$$\text{Número de segmentos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de ángulos



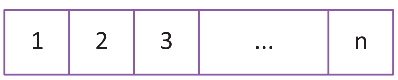
$$\text{Número de ángulos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de triángulos

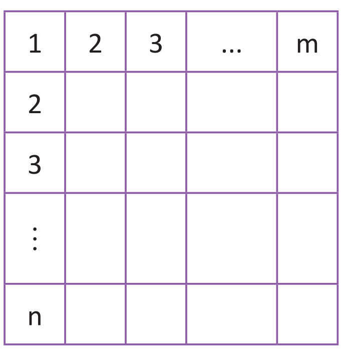


$$\text{Número de triángulos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de cuadriláteros

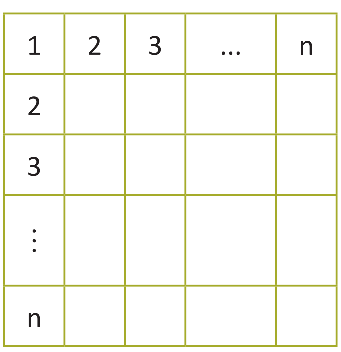


$$\text{Número de cuadriláteros} = \frac{n(n+1)}{2}$$



$$\text{Número de cuadriláteros} = \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de cuadrados



$$\text{Número de cuadrados} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Recuerda

$$\text{n.° de figuras geométricas} = \frac{n(n+1)}{2}$$

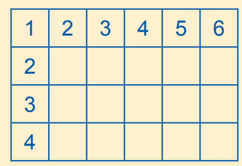
Está fórmula la podemos emplear en:

- Segmentos
- Ángulos
- Triángulos
- Cuadriláteros
- Hexágonos



Atención

¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura?

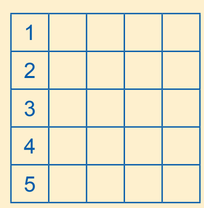


n.° de □ = $\frac{6 \times 7}{2} \times \frac{4 \times 5}{2} = 210$



Atención

¿Cuántos cuadrados hay en la figura?



n.° de □ $= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55$



Atención

¿Cuántos cuadrados hay en la figura?

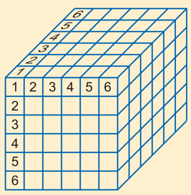
1	2	3	4	5	6	7
2						
3						
4						
5						

n.° de □
$= 7 \times 5 + 6 \times 4 + 5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 1$
$= 35 + 24 + 15 + 8 + 3$
$= 85$



Atención

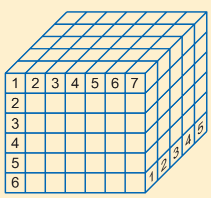
Aplicación:



$\text{n.° de cubos} = \left[\dfrac{6(6+1)}{2}\right]^2$

$\text{n.° de cubos} = 21^2 = 441$

Atención



$\text{n.° de paralelepípedos} = \dfrac{6\times(6+1)}{2} \times \dfrac{7(7+1)}{2} \times \dfrac{5(5+1)}{2}$

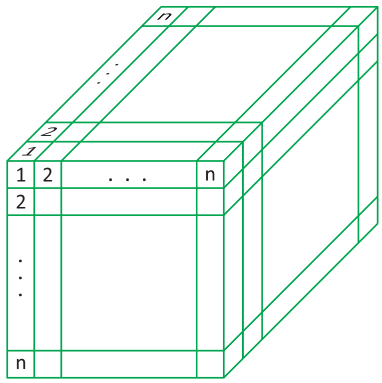
$= 21 \times 28 \times 15$
$= 8820$



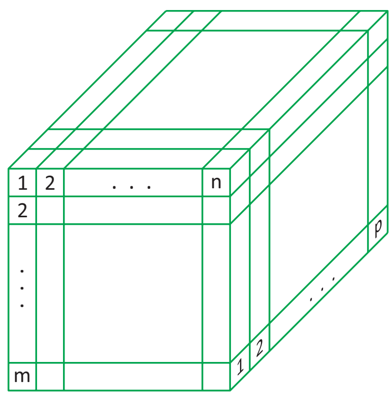
1	2	3	...	n
2				
3				
⋮				
m			...	

$$\text{Número de cuadrados} = m\times n + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + ...$$

Número de cubos

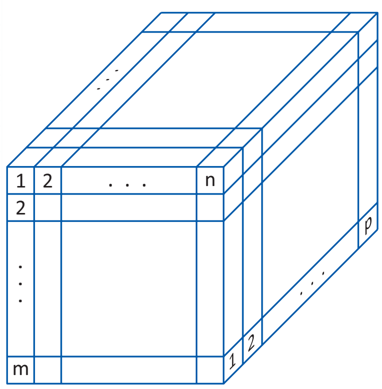


$$\text{Número de cubos} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$



$$\text{Número de cubos} = m \times n \times p + (m-1)(n-1)(p-1) + (m-2)(n-2)(p-2) + ...$$

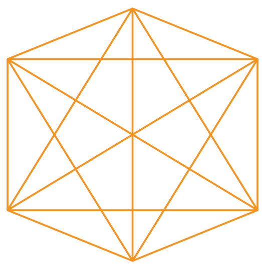
Número de paralelepípedos



$$\text{Número de paralelepípedos} = \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{p(p+1)}{2}$$

Problemas resueltos

1 Determina el número total de segmentos de la siguiente figura.



Resolución:

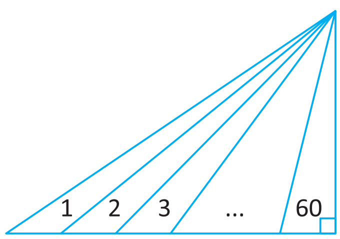
El número total de segmentos es igual al número de lados más el número de segmentos en cada diagonal.

n.° de lados = 6

n.° de segmentos en las diagonales $= 9\left(\dfrac{4 \times 5}{2}\right) = 90$

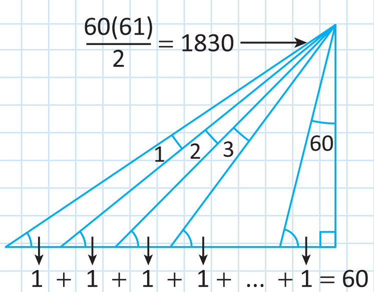
$\therefore$ n.° total de segmentos = 90 + 6 = 96

2 ¿Cuántos ángulos agudos hay en la figura?



Resolución:

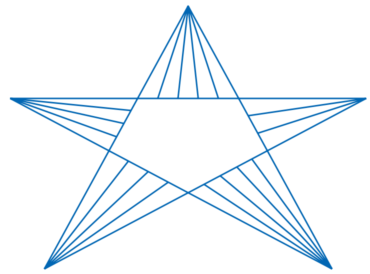
Contamos el número de ángulos en dos partes como se observa en el gráfico.



$\therefore$ Número de ángulos agudos =

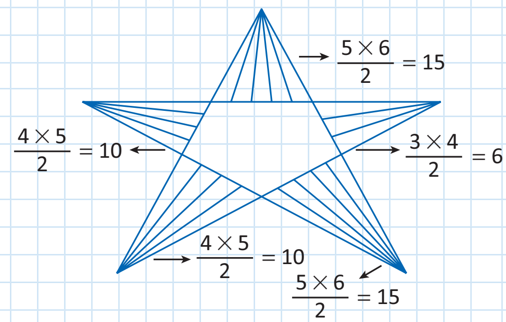
$1830 + 60 = 1890$

3 ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

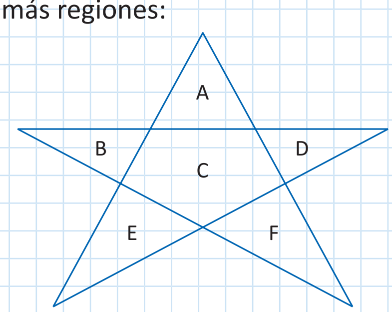


Resolución:

Contando por partes:



Ahora contamos las regiones compuestas por dos o más regiones:



Con 3 letras: BCD, ACF; ECD; ACE; BCF: 5

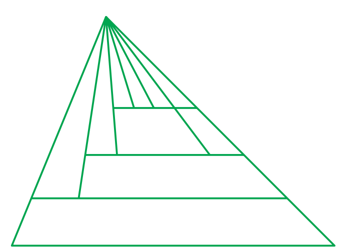
$\therefore$ Número de triángulos $= 2(15) + 2(10) + 6 + 5$

$= 61$

5 Si: T: n.° de triángulos

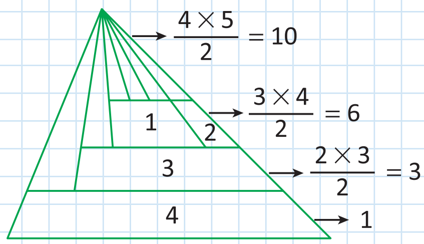
C: n.° de cuadriláteros

Halla (T + C) en la figura.



Resolución:

Contando por partes:



Contamos el n.° de triángulos:

n.° de triángulos = 10 + 6 + 3 + 1 = 20

Luego: T = 20

Contamos el n.° de cuadriláteros:

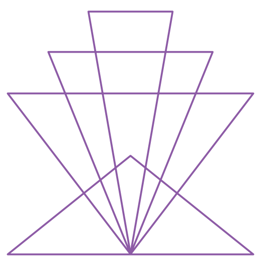
Con 1 número: 1; 2; 3; 4 ⟶ 4

Con 2 números: 12 ⟶ 1

Luego: C = 5

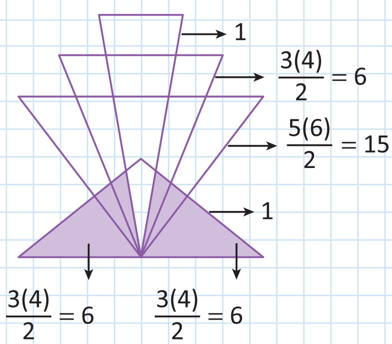
∴ T + C = 20 + 5 = 25

5 ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



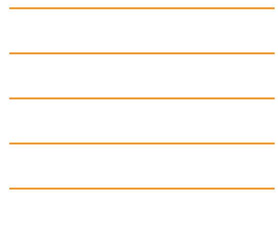
Resolución:

Calculando por partes:



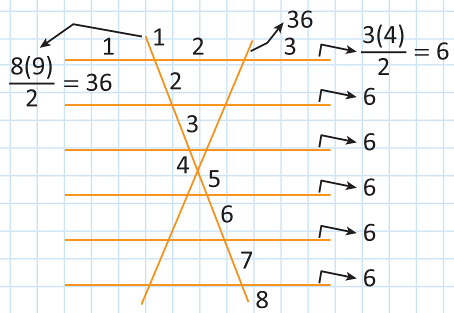
∴ Número de triángulos = 1 + 6 + 15 + 6 + 6 + 1 = 35

6 ¿Cuántos segmentos adicionales como mínimo se deben trazar en la figura mostrada de modo que en total se cuenten 108 segmentos?



Resolución:

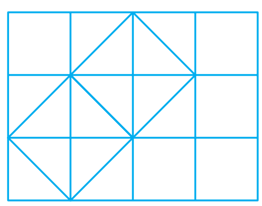
Trazamos segmentos oblicuos y secantes:



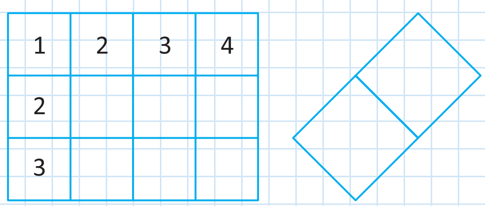
Número total de segmentos = 2(36) + 6(6)
= 108

∴ Se deben trazar 2 segmentos.

7 Indica el número total de cuadriláteros que no sean cuadrados.
Ojo: no considerar trapecios.



Resolución:



Calculando por partes

- Contamos cuadriláteros

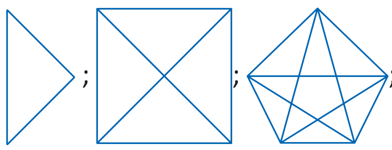
n.° de total de cuadriláteros $= \frac{4 \times 5}{2} \times \frac{3 \times 4}{2} + 3 = 63$

- Contamos cuadrados:

n.° total de cuadrados $= 4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 1 + 2 = 22$

$\therefore$ Total de cuadriláteros que no son cuadrados:
$63 - 22 = 41$

8 Calcula S_{20} sabiendo que S_n es igual al número máximo de segmentos en figuras geométricas regulares.



Resolución:

Veamos cómo se obtiene el número de segmentos.

$S_1 = 3 = 3 + 0$
+2

$S_2 = 10 = 4 + 6 = 4 + 2\left(\dfrac{2 \times 3}{2}\right)$
+ 2 → n.° de diagonales

$S_3 = 35 = 5 + 30 = 5 + 5\left(\dfrac{3 \times 4}{2}\right)$
+ 2 → n.° de diagonales

Se observa que el número total de segmentos es igual es igual al número de lados del polígono más el número de segmentos.

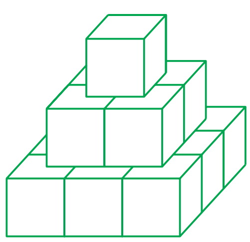
Luego:

$S_{20} = 22 +$ n.° de diagonales de un polígono de 22 lados
+ 2

$S_{20} = 22 + 209 \times 210$

$\therefore\ S_{20} = 43\,912$

9 ¿Cuántos cubitos más se necesitan para formar un sólido similar al de la figura mostrada; pero que tenga 11 cubitos de altura?



Resolución:

De la figura se observa que:

Fila 1: 1 cubito $= 1^2$

Fila 2: 4 cubitos $= 2^2$

Fla 3: 9 cubitos $= 3^2$

Luego:

Cantidad de cubitos que se tienen es:
$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

Ahora vamos a formar una figura que tenga 11 cubitos de altura:

Fila 1: 1 cubito $= 1^2$

Fila 2: 4 cubitos $= 2^2$

Fila 3: 9 cubitos $= 3^2$

⋮

Fila 11: 121 cubitos $= 11^2$

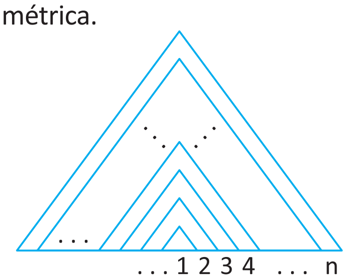
Luego:

Cantidad de cubitos que se debe tener $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 11^2$

$= \dfrac{11 \times 12 \times 23}{6} = 506$

$\therefore$ Cantidad de cubitos que faltan $= 506 - 14 = 492$

8 Dado el siguiente gráfico, se tiene que el número total de triángulos es 1/17 del número total de segmentos que se puede contar. Calcula "n", si la figura es simétrica.



Resolución:

Triángulos $= \dfrac{1}{17}$ (segmentos)

$n = \dfrac{1}{17}\left(n + n + \dfrac{(2n-1)(2n)}{2}\right)$

izquierda derecha abajo

$17n = 2n + (2n - 1) \cdot n$

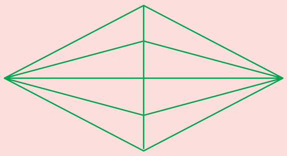
$17n = 2n + 2n^2 - n$

$16n = 2n^2$

$8 = \dfrac{n^2}{n} \quad \therefore n = 8$

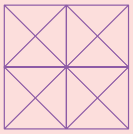
Actividades de razonamiento

1. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden observar como máximo en esta figura?



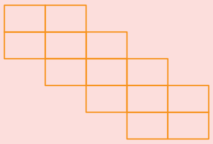
A) 5 B) 9 C) 6 D) 11 E) 12

2. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



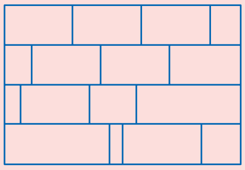
A) 30 B) 36 C) 40 D) 44 E) 48

3. ¿Cuántos rectángulos como máximo se forman en la figura?



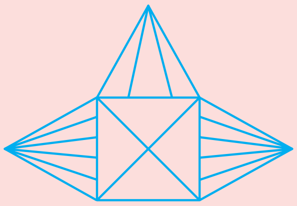
A) 25 B) 26 C) 39 D) 28 E) 29

4. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?



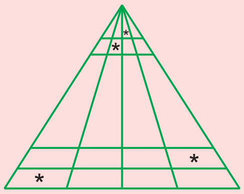
A) 40 B) 41 C) 45 D) 46 E) 43

5. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



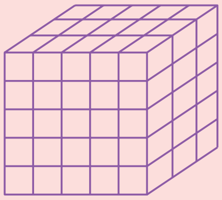
A) 40 B) 49 C) 45 D) 44 E) 36

6. ¿Cuántos triángulos existirán en cuyo interior se encuentre por lo menos un asterisco?



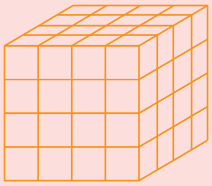
A) 40 B) 39 C) 41 D) 42 E) 43

7. De la siguiente figura, si:
C = n.° de cubos
P = n.° de paralelepípedos
Halla: P – 11C



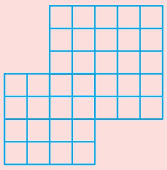
A) 64 B) 51 C) 42 D) 82 E) 74

8. De la siguiente figura, si:
C = n.° de cubos
P = n.° de paralelepípedos
Halla: $\sqrt{C} + \sqrt[3]{P}$



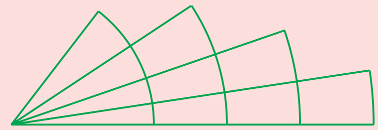
A) 10 B) 25 C) 40 D) 20 E) 30

9. Calcula el máximo número de cuadrados en:



A) 65 B) 80 C) 85 D) 70 E) 75

10. Calcula el máximo número de sectores circulares en:



A) 10 B) 16 C) 20 D) 14 E) 18

11. Indica la tercera parte de paralelogramos que hay en la siguiente figura:



A) $n^2 + 1$ B) $n(n + 1)$ C) $n(n - 1)$
D) $n^2 - 1$ E) $3n(n + 1)$

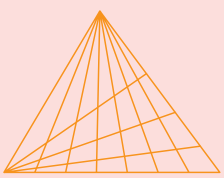
12. De la siguiente figura mostrada:

T = n.° de segmentos
N = n.° de cuadriláteros
Halla: T – N

1	2	3	...	10

A) 70 B) 65 C) 60 D) 68 E) 66

13. Calcula el número total de triángulos en la figura.



A) 160 B) 156 C) 152
D) 158 E) 154

14. En la figura mostrada, ¿cuántos cuadriláteros tiene por lo menos un asterisco?

			*
		*	
	*		
*			

A) 70 B) 30 C) 80 D) 50 E) 100

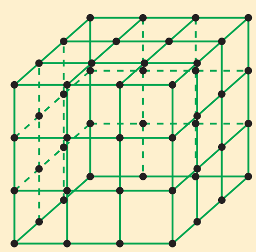
Claves

1. C
2. D
3. C
4. D
5. D
6. D
7. E
8. D
9. B
10. C
11. B
12. E
13. E
14. A

Reto

Considerando las caras y las aristas del cubo, ¿cuántos segmentos en total pueden contarse?



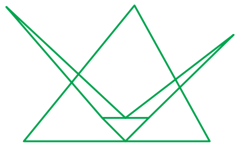


Rpta.: 216

Refuerza practicando

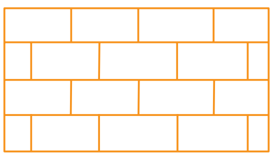
NIVEL 1

1. En la figura existen a triángulos y b cuadriláteros en total, halla a + b.



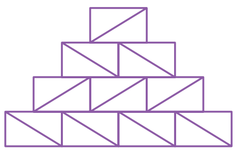
A) 13
B) 15
C) 16
D) 19
E) 17

2. Calcula el número total de cuadriláteros existentes en la figura.



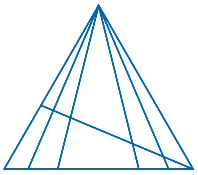
A) 60
B) 56
C) 30
D) 20
E) 40

3. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden contar, en total, en la siguiente figura?



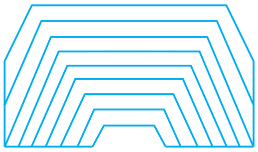
A) 50
B) 52
C) 48
D) 46
E) 54

4. Halla el número total de triángulos.



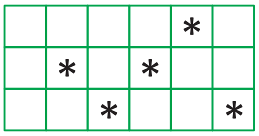
A) 20
B) 35
C) 38
D) 22
E) 21

5. Halla el número de octógonos en la figura mostrada.



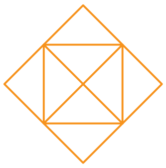
A) 24
B) 20
C) 2
D) 28
E) 36

6. ¿Cuántos cuadrados se podrán contar como máximo tal que posean al menos un asterisco?



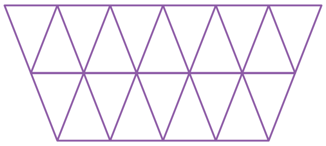
A) 15
B) 17
C) 19
D) 21
E) 23

7. ¿Cuántos pentágonos se podrán contar como máximo en la siguiente figura?



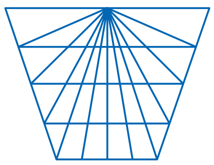
A) 16
B) 10
C) 15
D) 30
E) 20

8. Calcula el número total de triángulos.



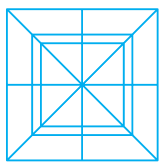
A) 28
B) 26
C) 27
D) 32
E) 30

9) ¿Cuántos triángulos se cuentan en total en la siguiente figura?



A) 150
B) 152
C) 154
D) 156
E) 158

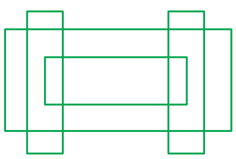
10) ¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos se pueden contar en la siguiente figura? Da como respuesta la suma de ambos resultados.



A) 65
B) 68
C) 62
D) 63
E) 67

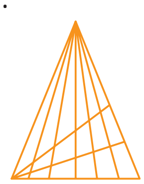
NIVEL 2

11) ¿Cuántos cuadriláteros hay en total en la siguiente figura?



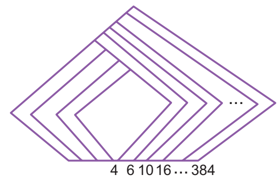
A) 38
B) 32
C) 34
D) 29
E) 35

12) Halla el número total de triángulos en la siguiente figura.



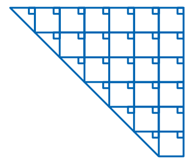
A) 60
B) 81
C) 62
D) 63
E) 79

13) Calcula el total de hexágonos en la siguiente figura:



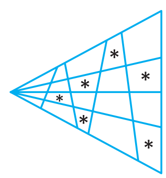
A) 187
B) 185
C) 184
D) 190
E) 196

14) Calcula el total de segmentos en la siguiente figura.



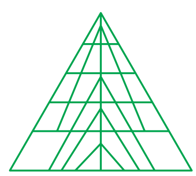
A) 181
B) 182
C) 186
D) 215
E) 196

15) ¿Cuántos cuadriláteros que contengan al menos un asterisco se pueden contar, en total, en la siguiente figura?



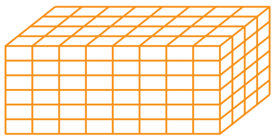
A) 100
B) 88
C) 82
D) 85
E) 83

16) ¿Cuántos triángulos se pueden contar, en total, en la siguiente figura?



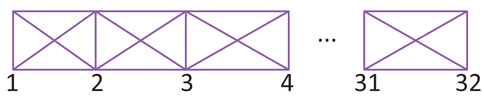
A) 45
B) 48
C) 51
D) 53
E) 58

17. Si pintamos toda la superficie externa del siguiente sólido y luego retiramos todos los cubitos que tengan pintadas algunas de sus caras ¿con cuántos cubitos nos quedaremos?



A) 56
B) 48
C) 36
D) 52
E) 64

18. Determina la cantidad total de triángulos que se pueden contar en la siguiente figura.



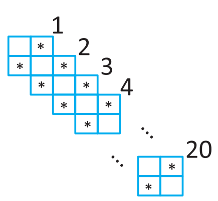
A) 64 B) 124 C) 208 D) 308 E) 318

19. El número de puntos de intersección entre rectángulos y rombos es 164. Calcula el número de circunferencias.



A) 41 B) 42 C) 43 D) 44 E) 40

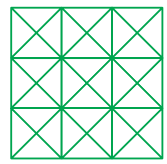
20. Halla el número total de cuadriláteros que tengan al menos un asterisco.



A) 186
B) 156
C) 178
D) 168
E) 170

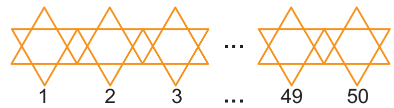
NIVEL 3

21. ¿Cuántos cuadrados hay en total en la figura?
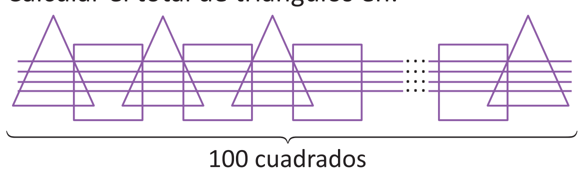


A) 31
B) 35
C) 38
D) 43
E) 40

22. ¿Cuántos triángulos se cuentan en total en la siguiente figura?



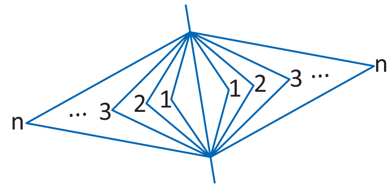
A) 498 B) 435 C) 472 D) 499 E) 512

23. Calcular el total de triángulos en:



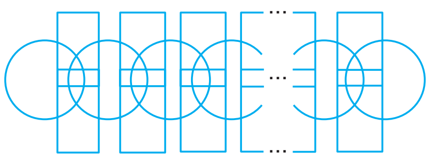
A) 1505 B) 1450 C) 1305 D) 1455 E) 1550

24. ¿Cuántos cuadriláteros convexos y cóncavos hay en la siguiente figura? Da como respuesta la suma de ambos resultados.



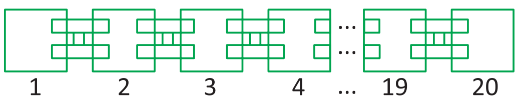
A) $2n^2 + 2$
B) $n(n + 1)$
C) $n(2n - 1)$
D) $2n(n + 1)$
E) $2n^2$

25. Halla el número total de puntos de intersección entre circunferencias y cuadriláteros, o entre circunferencias, si en total se pueden contar 120 cuadriláteros.



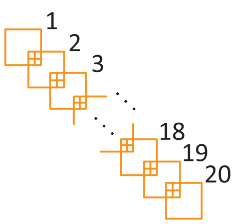
A) 118 B) 200 C) 110 D) 124 E) 130

26. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?



A) 400 B) 362 C) 419 D) 381 E) 399

27. ¿Cuántos cuadrados hay en total en la figura?



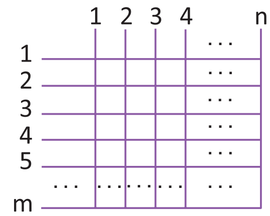
A) 117
B) 118
C) 120
D) 112
E) 115

28. Se tienen **n** círculos concéntricos con diferentes radios. ¿Cuántas coronas circulares se forman como máximo?

A) $\frac{n(n+1)}{2}$ B) n^2 C) $\frac{(n-1)n}{2}$

D) $(2n+1)^2$ E) $(2n-1)^2$

29. Calcula el número total de segmentos y el número total de puntos de intersección en la siguiente figura. Da como respuesta la diferencia entre ambos resultados.

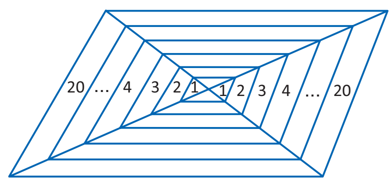


A) m^2+n^2 B) $\frac{mn(m+n-2)}{2}$

C) $\frac{mn(m+n)}{2}$ D) $\frac{m(m-n)}{2}$

E) $\frac{n(m+n)}{2}$

30. ¿Cuántos cuadriláteros cóncavos se cuentan en total en la siguiente figura?



A) 1520
B) 730
C) 780
D) 760
E) 720

Claves

NIVEL 1	9. C	17. B	25. B
1. E	10. D	18. D	26. C
2. B	NIVEL 2	19. E	27. E
3. A	11. E	20. C	28. C
4. B	12. B	NIVEL 3	29. C
5. A	13. E	21. A	30. A
6. C	14. B	22. A	
7. A	15. C	23. C	
8. A	16. A	24. C	

Fracciones

NÚMERO RACIONAL

Está representado por la división indicada de dos números enteros, donde el divisor es diferente de cero.

Se denota: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$

FRACCIÓN

Todo números racional que cumple las siguientes condiciones, se denomina fracción.

Fracción: $\frac{a}{b}$ a ⟶ Numerador; b ⟶ Denominador

Donde: $a \text{ y } b \in \mathbb{Z}^+$

$a \neq \overset{\circ}{b}$

Nota

¿Cuáles de las siguientes expresiones son fracciones?

$\frac{2}{3}; \frac{8}{6}; \frac{7}{-3}; \frac{4}{5}; \frac{-5}{9}; \frac{\pi}{4}; \frac{e}{3}$

Son fracciones:

$\frac{2}{3}; \frac{8}{6}; \frac{4}{5}$

No son fracciones:

$\frac{7}{-3}; \frac{-5}{9}; \frac{\pi}{4}; \frac{e}{3}$

Representación gráfica de una fracción

Se debe considerar lo siguiente:

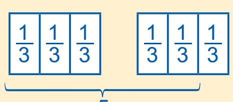
$f = \frac{a}{b}$

a ⟶ n.° de partes que se consideran de la unidad.

b ⟶ n.° de partes iguales en que se divide la unidad o total.

Atención

También se puede representar gráficamente fracciones impropias.



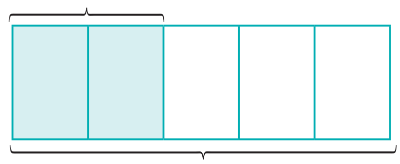
$\frac{5}{3}$



Ejemplo:

2 partes iguales

f: $\frac{2}{5}$ ⇒



5 partes iguales

Principales tipos de fracciones

Fracción propia — Fracción impropia

$\frac{27}{100}; \frac{9}{10}; \frac{12}{20}; \frac{18}{30}; \frac{15}{25}; \frac{8}{6}; \frac{5}{4}; \frac{21}{8}; \frac{7}{3}; \frac{14}{9}$

F. decimal — F. reductible — F. irreductible

F. ordinaria

Observación

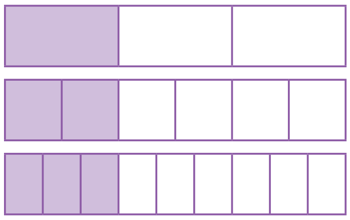
Si: $f = \frac{a}{b}$ es una fracción, entonces:

f es propia ⟺ f < 1 (a < b)

f es impropia ⟺ f > 1 (a > b)

Fracciones equivalentes

Dos o más fracciones son equivalentes, cuando con términos distintos expresan la misma parte de la unidad o total.



$\frac{1}{3}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{3}{9}$

$$\frac{1}{3} <> \frac{2}{6} <> \frac{3}{9} <> \ldots \quad (\times 2,\ \times 3)$$

Fracción equivalente a: $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$; $k \in \mathbb{Z}^+ \wedge \frac{a}{b}$: fracción irreductible

Atención

$\frac{a}{b} <> \frac{c}{d}$

Si: $\left.\begin{matrix} c = a \times k \\ d = b \times k \end{matrix}\right\} k \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a \times k}{b \times k}$

Siendo $\frac{a}{b}$ irreductible.



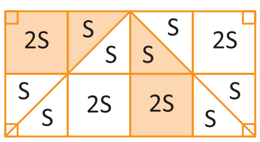
RELACIÓN PARTE-TODO

Es una relación geométrica de una cantidad asumida como parte respecto a otra asumida como todo.

$$\frac{a}{b} \rightarrow \frac{\text{Lo que hace de parte (es, son, representa)}}{\text{Lo que hace de todo (de, del, respecto)}}$$

Ejemplo:

¿Qué parte del área de la región no sombreada es el área de la región sombreada en la siguiente figura?



Resolución:

Piden:

$$\frac{\text{Región sombreada}}{\text{Región no sombreada}} = \frac{6S}{10S} = \frac{3}{5}$$

FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN NÚMERO DECIMAL

Los números decimales pueden ser:

Decimal exacto

- $0{,}25 = \frac{25}{100}$
- $0{,}529 = \frac{529}{1000}$
- $10{,}137 = \frac{10137}{1000}$

Decimal inexacto

- Decimal periódico puro
  - $0{,}\overset{\frown}{32} = \frac{32}{99}$
  - $0{,}\overset{\frown}{245} = \frac{245}{999}$
  - $3{,}\overset{\frown}{42} = \frac{342-3}{99}$
- Decimal periódico mixto
  - $0{,}1\overset{\frown}{53} = \frac{153-1}{990}$
  - $0{,}27\overset{\frown}{4} = \frac{274-27}{900}$
  - $2{,}5\overset{\frown}{61} = \frac{2561-25}{990}$

Importante

¿Cómo se generan números decimales exactos?

Se obtienen a partir de aquellas fracciones cuyos denominadores tengan como únicos divisores a 2 y/o 5.

¿Cómo se genera un número decimal periódico puro?

Se genera de aquella fracción cuyo denominador no tiene como divisores ni a 2, ni a 5.

¿Cómo se genera un número decimal periódico mixto?

Se genera de aquella fracción cuyo denominador tiene como divisores a 2 y/o 5 además de otro u otros divisores.



Problemas resueltos

1 Simplifica:

$$E=\left[2\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\times\frac{7}{3\frac{4}{5}}-\frac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{1}{2}}\right]\div 1\frac{77}{228}$$

Resolución:

$$E=\left[\frac{11}{4}+\frac{5}{2}\times\frac{7}{\frac{19}{5}}-\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}}\right]\div\frac{305}{228}$$

$$E=\left[\frac{11}{4}+\frac{5}{2}\times\frac{35}{19}-\frac{2}{3}\right]\div\frac{305}{228}$$

$$E=\left[\frac{25}{12}+\frac{175}{38}\right]\div\frac{305}{228}$$

$$E=\frac{1525}{228}\times\frac{228}{305}$$

$\therefore\ E=5$

2 Si la fracción $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}$ es equivalente a 7/4. Halla el mayor valor de $\overline{ab}+\overline{ba}$.

Resolución:

Del enunciado: $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=\frac{7}{4}$

$$\frac{10a+b}{10b+a}=\frac{7}{4}$$

$$40a+4b=70b+7a$$

$$33a=66b$$

$$a=2b$$

$$\frac{a}{b}=\frac{2k}{1k}$$

Luego: Si
a = 2 b = 1
a = 4 b = 2
a = 6 b = 3
a = 8 b = 4 ✓ (Mayor valor)

Finalmente: $\overline{ab}+\overline{ba}=84+48=132$

3 ¿Cuántos valores puede tomar n, si 24/n es una fracción propia e irreductible, mayor que 3/5?

Resolución:

Según el enunciado:

$$\frac{3}{5}<\frac{24}{n}<1$$

→ La fracción es propia

Entones: $\frac{3}{5}<\frac{24}{n}\Rightarrow n<40$ ...(I)

También: $\frac{24}{n}<1\Rightarrow 24<n$ ...(II)

De (I) y (II): $24<n<40$

Luego, para que la fracción $\frac{24}{n}$ sea irreductible, n y 24 deben ser primos entre sí.

Como: $24=2^3\times 3$: n no debe tener factor 2 ni 3

Luego: n = 25; 29; 31; 35; 37

$\therefore$ n tiene 5 valores.

4 Si la fracción: $\frac{1}{\overline{AL}}$ genera el decimal: $0,\widehat{0(A-1)L}$

Calcula el valor de:

$$\left(\frac{\overline{AL}+\overline{LA}}{\underbrace{\overline{AL}+\overline{AL}+...+\overline{AL}}_{(A+L+1)\text{ veces}}}\right)^{-1}$$

Resolución:

Según el enunciado:

$$\frac{1}{\overline{AL}}=0,\widehat{0(A-1)L}=\frac{\overline{(A-1)L}}{999}$$

$$\frac{1}{\overline{AL}}=\frac{\overline{(A-1)L}}{999}\Rightarrow \overline{AL}\times\overline{(A-1)L}=999$$

$$\overline{AL}\times\overline{(A-1)L}=37\times 27$$

Entonces: A = 3, L = 7

Luego: $\left(\frac{\overline{AL}+\overline{LA}}{\underbrace{\overline{AL}+\overline{AL}+...+\overline{AL}}_{(A+L+1)\text{ veces}}}\right)^{-1}=$

$$\left(\frac{37+73}{\underbrace{37+37+...+37}_{11\text{ veces}}}\right)^{-1}=\left(\frac{110}{37\times 11}\right)^{-1}$$

$$=\frac{407}{110}=3,7$$

5 Se tienen las fracciones propias A/8 y B/11; si se cumple que:

$A + B = 11$ y $\frac{A}{8} - \frac{B}{11} = 0,51\widehat{136}$

Halla: A – B

Resolución:

Del dato: $\frac{A}{8} - \frac{B}{11} = 0,51\widehat{136}$

$$\frac{11A - 8B}{8 \times 11} = \frac{51136 - 511}{99\,000}$$

$$\frac{11A - 8B}{8 \times 11} = \frac{50625}{9 \times 11 \times 1000}$$

$$\underset{7}{\underset{\downarrow}{11A}} - \underset{4}{\underset{\downarrow}{8B}} = 45$$

Entonces $A = 7$ y $B = 4$

$\therefore\ A - B = 7 - 4 = 3$

6 Si la siguiente fracción irreductible cumple:

$$\frac{a}{\overline{mn}} = 0,\overline{(2n)\left(\frac{n}{2}\right)(3n)}$$

Calcula el valor de: a + m + n

Resolución:

$$\frac{a}{\overline{mn}} = 0,\overline{(2n)\left(\frac{n}{2}\right)(3n)}$$

Se observa que $n = \overset{\circ}{2}$ y el único valor que cumple es $n = 2$.

Reemplazando:

$$\frac{a}{\overline{m2}} = 0,41\widehat{6}$$

$$\frac{a}{\overline{m2}} = \frac{416 - 41}{900}$$

$$\frac{a}{\overline{m2}} = \frac{375}{900}$$

$$\frac{a}{\overline{m2}} = \frac{5}{12}$$

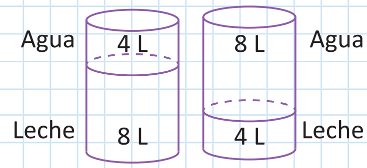
Comparando:

$a = 5 \quad \overline{m2} = 12 \Rightarrow m = 1$

$\therefore a + m + n = 5 + 1 + 2 = 8$

7 Se tienen 2 recipientes; el primero contiene 4 L de agua y 8 L de leche, el segundo contiene 8 L de agua y 4 L de leche. Si se extraen 3 L de cada uno simultáneamente para ser intercambiados, ¿qué cantidad de agua hay en el primer recipiente ahora?

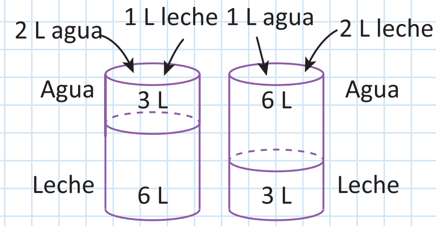
Resolución:



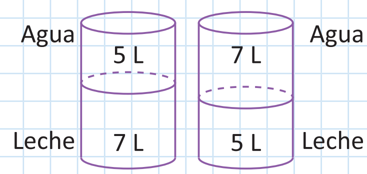
Luego, se extraen 3 L de cada recipiente:

1.er recipiente		Extrae	2.° recipiente		Extrae
Agua	4	1	Agua	8	2
Leche	8	$\frac{2}{3}$	Leche	4	$\frac{1}{3}$

Las cantidades de agua y leche que se extraen deben ser proporcionales a las cantidades de agua y leche que hay en el recipiente.

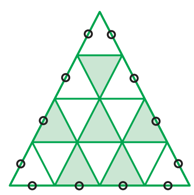


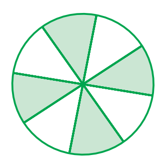
Luego del intercambio los recipientes quedan así:



$\therefore$ En el 1.er recipiente hay 5 L de agua.

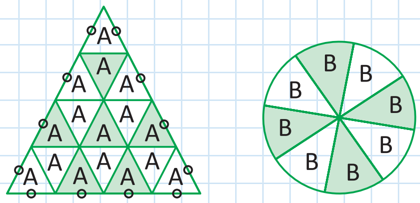
8 El área de la región triangular es la tercera parte del área del círculo. ¿Qué parte representa la región sombreada del triángulo respecto de la región no sombreada del círculo?





Resolución:

Asignando un valor al área de cada región triangular y circular.



Según el enunciado:

Área del triángulo $= \frac{1}{3}$(Área del círculo)

$$16A = \frac{1}{3}8B$$

$$6A = B \Rightarrow B = 6A$$

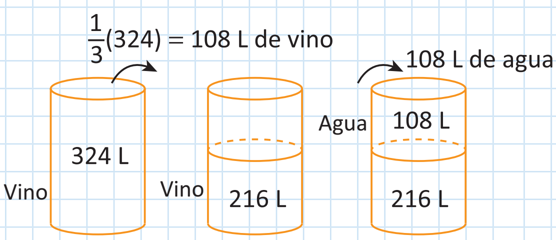
Piden: $\frac{\text{Región sombreada del triángulo}}{\text{Región no sombreada del círculo}}$

$$\frac{6A}{4B} = \frac{6A}{4(6A)} = \frac{1}{4}$$

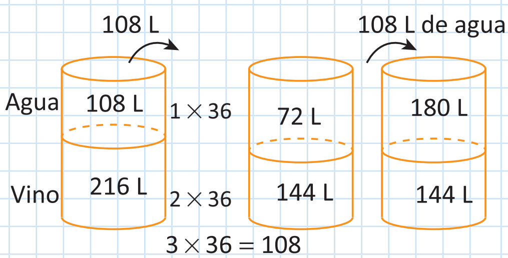
9 Se tiene un tonel lleno de 324 L de vino puro. Se saca 1/3 del contenido y se completa con agua. ¿Cuántas veces más se debe repetir esta operación para que al final queden 260 L de agua?

Resolución:

1.ª operación:

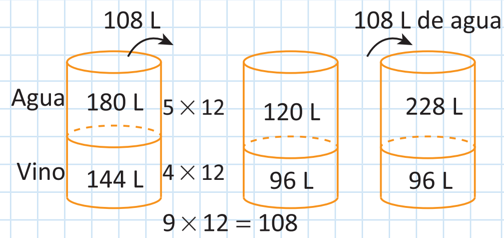


2.ª operación:



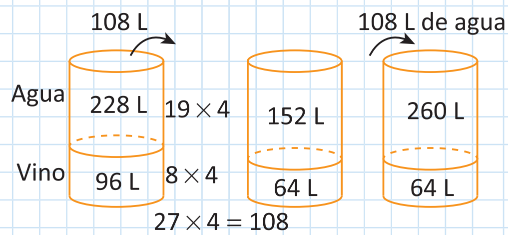
Se extraen 108 L del recipiente, de los cuales 36 L son de agua y 72 de vino, luego se reemplaza por agua.

3.ª operación:



Se extraen 108 L del recipiente, de los cuales 60 son de agua y 48 de vino, luego se reemplaza por agua.

4.ª operación:



Se extraen 108 L del recipiente, de los cuales 76 L son de agua y 32 de vino y se reemplaza por agua.

∴ La operación se debe repetir 3 veces más.

10 Se tienen 3 caños para llenar un tanque; el 1.° lo puede llenar en 72 horas, el 2.° en 90 horas y el 3.° en 120 horas. Si estando vacío el tanque se abren simultáneamente las llaves de los 3 caños, ¿en qué tiempo llenarán las 2/9 de los 3/2 del tanque?

Resolución:

El 1.er caño lo llena en 72 horas

$\Rightarrow$ En 1 h llena $\frac{1}{72}$

El 2.° caño lo llena en 90 horas

$\Rightarrow$ En 1 h llena $\frac{1}{90}$

El 3.er caño lo llena en 120 horas

$\Rightarrow$ En 1 h llena $\frac{1}{120}$

Luego los 3 juntos en 1 h:

$$\frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{120} = \frac{10+8+6}{720} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$$

Entonces lo harán en 30 h

Piden: $\frac{2}{9} \times \frac{3}{2} \times 30\text{ h} = 10\text{ h}$

Actividades de razonamiento

1. Dada la siguiente fracción propia $\frac{x+1}{2x-1}$; halla la suma de valores de x que cumplen dicha condición, sabiendo que es un número entero menor que 7.

A) 15 B) 18 C) 20 D) 12 E) 10

2. ¿Cuántas fracciones propias existen de términos impares consecutivos que sean menores que 0,83?

A) 6 B) 3 C) 7 D) 5 E) 4

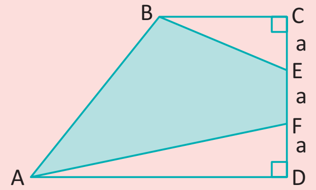
3. Halla una fracción cuya suma de términos es 31 y tal, que si se le suma 3 al numerador y 8 al denominador la nueva fracción es equivalente a 3/4.

A) 13/18 B) 12/19 C) 14/17 D) 16/15 E) 15/16

4. Disminuyendo una misma cantidad a los dos términos de la fracción x/y, se obtiene la fracción original invertida. ¿Cuál es aquella cantidad?

A) $x + y$ B) $x - y$ C) $y - x$ D) xy E) x/y

5. ¿Qué parte, del área total, representa el área de la región pintada? (AD = 2BC)



A) 1/2 B) 5/7 C) 1/3 D) 1/4 E) 2/3

6. ¿Cuántos octavos de 4/7 hay que restarle a 5/12 para obtener 5/21?

A) 3 B) 2,5 C) 4 D) 2 E) 3,5

7. Un alumno hace 1/3 de su tarea antes de ir a la fiesta, después de la fiesta hace 3/4 del resto y se va a dormir. ¿Qué parte de la tarea le queda por hacer?

A) 1/2 B) 1/6 C) 1/12 D) 2/3 E) 7/12

8. Una jugadora en su primer juego gana 1/3 de su dinero, vuelve a apostar y gana los 2/5 de lo que le quedaba y en una tercera apuesta gana 3/7 de lo que le quedó luego del segundo juego. Si se retiró con S/.320, halla cuánto ganó.

A) S/.150 B) S/.180 C) S/.200
D) S/.220 E) S/.240

9. Una pelota cae desde una altura de 54 m y en cada rebote se eleva una altura igual a los 2/3 de la altura de la cual cayó. Halla la distancia total recorrida por la pelota hasta tocar por cuarta vez la superficie.

A) 160 m B) 206 m C) 208 m D) 190 m E) 186 m

10. Una cañería llena una piscina en 4 h y otra la puede dejar vacía en 6 h. ¿En qué tiempo puede llenarse la piscina, si la cañería del desagüe se abre 1 h después?

A) 11 horas B) 12 horas C) 9 horas
D) 10 horas E) 13 horas

11. Tres caños llenan un tanque en 3 horas. Sabiendo que el primero solo lo haría en 18 horas y el segundo en 9 horas, calcula lo que demoraría el tercero trabajando solo.

A) 4 h B) 6 h C) 5 h D) 3 h E) 8 h

12. Un depósito tiene 2 tuberías para el llenado y una tubería para el desagüe. Las dos primeras llenarían cada una funcionando sola, en 4 y 6 horas, respectivamente, mientras que el desagüe vaciaría el depósito en 8 horas. Si se abren simultáneamente las tres tuberías, ¿en qué tiempo se llenará el depósito?

A) 2 2/3 horas B) 3 3/7 horas C) 5 3/4 horas
D) 4 3/8 horas E) 2 1/8 horas

13. Cierta tela después de lavada se encoge 1/5 de su largo y 1/6 de su ancho. ¿Cuántos metros deben comprarse para que después de lavada se disponga de 96 m^2, sabiendo que el ancho original es de 80 cm?

A) 160 m B) 180 m C) 200 m D) 210 m E) 220 m

14. Una piscina puede ser llenada por los caños A, B y C en 4; 5 y 6 minutos, respectivamente, y el caño D puede desaguar la piscina en 3 minutos. Se abren A y C 2 minutos, y cuando ellos se cierran, los caños B y D son abiertos. ¿En cuántos minutos la piscina estará íntegramente desaguada?

A) 6 1/4 min B) 6 1/2 min C) 6 3/4 min
D) 7 min E) 8 min

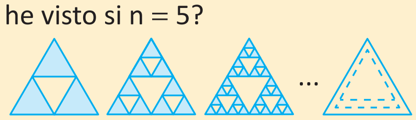
Claves

1. B 2. D 3. E 4. A 5. E 6. B 7. B 8. C 9. B 10. D 11. B 12. B 13. B 14. A

Reto



En una noche estrellada, pensaba:
"Veo en el cielo azul y triste, tantas estrellas como el doble del inverso multiplicativo de A(n)". ¿Cuántas estrellas he visto si n = 5?



f(1) f(2) f(3) ... f(n)

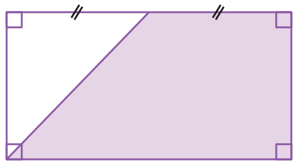
Se sabe además que A(k) representa la fracción del área del menor triángulo respecto al área total en la figura f(k).

Rpta.: 2048

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿Qué parte del área total, representa el área de la región pintada?



A) 2/3 B) 1/2 C) 5/6 D) 1/3 E) 3/4

2. Al mirar un reloj se observó que los 3/5 de lo que quedaba del día era igual al tiempo transcurrido. ¿Qué hora es?

A) 10 a. m. B) 2 p. m. C) 9 a. m.
D) 1 p. m. E) 11 a. m.

3. ¿Qué fracción de los $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ representan los $\frac{3}{7}$ de $\frac{8}{9}$?

A) $\frac{1}{54}$ B) $\frac{80}{63}$ C) $\frac{20}{63}$ D) $\frac{18}{54}$ E) $\frac{9}{63}$

4. Perdí 3/4 de lo que tenía. Si hubiese perdido los 2/3 de lo que perdí, tendría S/.60 más de lo que tengo. ¿Cuánto dinero tengo?

A) S/.360 B) S/.180 C) S/.30
D) S/.120 E) S/.60

5. En un depósito hay 18 litros de agua y 12 litros de leche. Si se retiran 8 litros de la mezcla, ¿cuántos litros de leche salen?

A) 4,8 L B) 4,2 L C) 3,2 L D) 3,6 L E) 5,4 L

6. Orlando realiza una mezcla de 4 litros de agua y 2 litros de zumo de naranja. Si luego extrae 2 litros de la mezcla, ¿cuántos litros de zumo de naranja se extraen?



A) $1\frac{1}{3}$ L B) 1 L C) $\frac{2}{3}$ L D) $\frac{3}{4}$ L E) $1\frac{2}{3}$ L

7. ¿Cuánto le falta a 1/12 para que sea igual a los 2/3 de los 5/8 de los 6/5 de 1/2?

A) 1/3 B) 1/6 C) 1/5 D) 1/8 E) 1/4

8. Un hombre realiza un trabajo en 6 h y su hijo lo hace en 12 h. ¿Cuánto tardarán en hacerlo juntos?

A) 4 h B) 6 h C) 9 h D) 3 h E) 18 h

9. Según una fábula, un león, que por cierto era muy generoso, se encontraba listo para comer sus presas cuando de repente se presentó el puma y el león compartió con este dándole los 2/3 de sus presas; luego se encontró con el tigre y le dio a este 2/5 de las presas que le quedaban y finalmente se encontró con el leopardo y le dio a este 3/7 de las presas que le quedaron después de que se encontró con el tigre. Si al final solo le quedaron 8 presas, ¿cuántas presas tenía el león al inicio?

A) 170 B) 35 C) 70 D) 85 E) 120

10. Los caños A, B y C llenan individualmente un estanque en 1; 2 y 4 horas, respectivamente. Si se abren los tres caños juntos, ¿en qué tiempo se llenará el estanque?

A) $\frac{4}{7}$ h B) $\frac{4}{8}$ h C) 2 h D) 1 h E) $\frac{3}{7}$ h

NIVEL 2

11. Se reparte cierta cantidad de dinero entre tres personas, recibiendo la primera los 5/7 de lo que recibió la segunda, y la tercera 1/8 menos de lo que recibieron las dos primeras personas, siendo esta suma igual a la mitad del total disminuido en S/.20. Halla dicha cantidad.

A) S/.200 B) S/.400 C) S/.300
D) S/.500 E) S/.100

12. César y Kike compran iguales cantidades de carne para su consumo diario. César emplea en el almuerzo las 4/5 partes de su carne y Kike emplea también en el almuerzo los 6/7 de la cantidad de carne que compró. ¿Qué parte del total de carne comprada les quedará a los dos juntos para la cena?

A) $\frac{7}{37}$ B) $\frac{1}{35}$ C) $\frac{12}{35}$ D) $\frac{6}{35}$ E) $\frac{11}{35}$

13. En un recipiente hay 16 litros de leche pura. Se consume la mitad y se completa con agua, luego se vuelve a consumir la mitad de la mezcla y se vuelve a completar con agua. ¿Cuántos litros de leche pura quedan en el recipiente?

A) 5 L B) 6 L C) 8 L D) 4 L E) 2 L

14. Un padre repartió su fortuna de la siguiente manera: al hijo mayor le dio la tercera parte, más S/.2000; al segundo le dio la cuarta parte de lo que quedaba más S/.1000; y al último 3/5 del resto más S/.800. Si todavía le quedan S/.1200, ¿cuánto era la fortuna del padre?

A) S/.10 000 B) S/.12 000 C) S/.15 000
D) S/.11 000 E) S/.1800

15. De un total de 140 litros de vino, el primer día se vende x litros, el segundo día se vende la tercera parte del resto, el tercer día se vende la cuarta parte de lo que queda y el cuarto día se vende la quinta parte del nuevo resto. Si todavía quedan x litros, halla el valor de x.

A) 40 L B) 20 L C) 10 L D) 70 L E) 7 L

16. Ana es tres veces más rápida que Juana. Si juntas demoran 6 h en hacer una obra, ¿cuántas horas habría demorado Ana trabajando sola?



A) 6 h B) 12 h C) 10 h D) 7,5 h E) 11 h

17. Un tanque posee un caño que lo llena en 5 horas y un desagüe que lo deja vacío en 6 horas. Si el desagüe se abre 3 horas después del caño, ¿en qué tiempo se llenará el tanque?

A) 14 h B) 12 h C) 15 h D) 10 h E) 18 h

18. Después de haber perdido sucesivamente los 3/8 de su fortuna, 1/9 del resto y los 5/12 del nuevo resto, una persona hereda S/.60 800 soles y de este modo la pérdida se halla reducida a la mitad de la fortuna primitiva. ¿A cuánto ascendía la fortuna?

A) S/.343 400 B) S/.345 600 C) S/.346 700
D) S/.344 500 E) S/.348 700

19. Si al numerador y denominador de la fracción 2/5 se agregan a y b unidades respectivamente, se obtiene la fracción 5/2; halla el menor valor de a + b, donde a y b son números primos.

A) 18 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

20. Se tienen 2 cajas de fósforos. Se usa de la primera 3/8 del total y de la segunda 2/7 del total. Los fósforos usados de la primera caja son 13 más que de la segunda y quedan en la primera caja 7/4 de los fósforos que quedan en la segunda. ¿Cuántos fósforos tenía cada caja?

A) 56 y 28 B) 19 y 14 C) 28 y 52
D) 14 y 19 E) 30 y 12

NIVEL 3

21. Juan Carlos va todos los días de su casa al colegio por el único camino que hay y regresa a su casa presuroso al terminar la clase. Si Juan Carlos recorrería los 2/3 de los 3/5 de los 7/3 de la mitad del camino de ida, estaría recorriendo 105 metros menos que si recorriera los 21/5 de los 4/7 de los 2/9 del camino usual de regreso. ¿Cuántos metros recorrerá Juan Carlos en transportarse de su casa al colegio y viceversa, en un día que fue 2 veces al colegio?

A) 5175 m B) 6300 m C) 6700 m
D) 6745 m E) 1350 m

22. Cada vez que Sofía entra al cine gasta la mitad de lo que no gasta; cada vez que entra al casino pierde la tercera parte de lo que no pierde y cada vez que entra al hipódromo gasta la cuarta parte de lo que no gasta. Si entra 3 veces al casino, 3 veces al cine y 3 veces al hipódromo en forma alternada y al final se quedó con S/.64, ¿cuánto dinero tenía antes de ingresar a dichos lugares?

A) S/.50 B) S/.250 C) S/.350
D) S/.800 E) S/.1000

23. En un recipiente de 10 litros de capacidad se vierten 5 litros de pisco, 2 litros de gaseosa y 3 litros de caña. Se prueba la mezcla y resulta muy “fuerte” por lo que se extrae la cuarta parte del contenido y se llena con gaseosa; se vuelve a probar y sigue muy “fuerte” por lo que se extrae 1/3 del contenido y se vuelve a llenar con gaseosa; se prueba nuevamente y sigue “fuerte” por lo que se extrae 1/5 de contenido y se llena con gaseosa. ¿Cuál es la cantidad de gaseosa contenida en el recipiente al final?

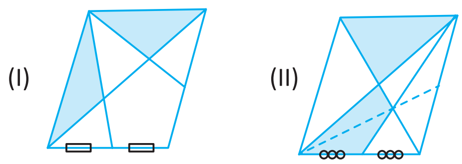
A) 6 L B) 3,4 L C) 4,25 L D) 6,8 L E) 0,4 L

24. Un elefante se dirige a beber de un estanque que no está totalmente lleno. El primer día consume 1/2 de lo que había, más 4 litros; el segundo día consume 1/2 de lo que quedaba más 5 litros; el tercer día 1/2 de lo restante, más 6 litros; sobrándole 6 litros. ¿Cuál es la capacidad del estanque, si 1/5 de esta excede a lo consumido el segundo día en 2 litros?



A) 175 L B) 176 L C) 177 L D) 178 L E) 180 L

25. ¿Qué fracción representa la región sombreada II respecto de la región no sombreada del paralelogramo I, si el área total de la figura I es los 3/2 del área total de la figura II?



A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{3}{12}$ D) $\frac{2}{12}$ E) $\frac{1}{12}$

26. Un determinado tipo de gusano se duplica cada 3 días. Luego de 15 días de haber colocado un cierto número de ellos en una caja, esta estaba llena. Si 3 gusanos juntos ocupan 1/448 de la caja, ¿cuántos gusanos se pusieron inicialmente en dicha caja?

A) 24 B) 38 C) 84 D) 36 E) 42

27. Al sumar las 11 fracciones propias y homogéneas: $\frac{10}{a_1}+\frac{11}{a_2}+\frac{12}{a_3}+...+\frac{20}{a_{11}}$; se obtiene como resultado un máximo número entero. Halla a_8.

A) 165 B) 25 C) 55 D) 33 E) 36

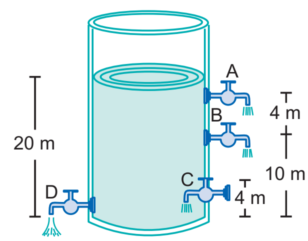
28. Una compañía tiene 3 pintores que pueden pintar una casa en 4 días: Panchito, que puede pintar una casa en 8 días; Lolito, que puede pintar una casa en 12 días y Luchito. La compañía firma un contrato para pintar 3 casas. Empieza Luchito, quien trabaja durante 8 días, luego lo reemplaza Panchito quien trabaja durante 6 días y es reemplazado por Lolito, quien concluye la obra. ¿Cuántos días trabajó Lolito?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 23

29. Dos caños pueden llenar un tanque en 50 y 40 horas respectivamente. Se deja abierto el primero durante 15 horas y después el segundo durante 16 horas. Enseguida se retiran 90 litros, y luego se abren las dos llaves, terminando de llenarse el tanque en 10 horas. ¿Cuál es la capacidad del tanque?

A) 600 L B) 550 L C) 640 L
D) 450 L E) 540 L

30. El tanque mostrado contiene 200 L de agua. Por los caños A, B y D sale agua a razón de 2; 3 y 5 L/s respectivamente, mientras que por el suministro C ingresa agua a razón de 4 L/s. Si el nivel inicial de agua es 20 m, ¿en qué tiempo quedará vacío el tanque?



A) 100 s B) 90 s C) 120 s D) 50 s E) 88 s

Claves

NIVEL 1	9. C	17. C	25. A
1. E	10. A	18. B	26. E
2. C	NIVEL 2	19. E	27. D
3. B	11. C	20. A	28. E
4. E	12. D	NIVEL 3	29. A
5. C	13. D	21. B	30. E
6. C	14. C	22. E	
7. B	15. A	23. D	
8. A	16. D	24. E	

Tanto por ciento

DEFINICIÓN

Consiste en tomar **m** partes de una cantidad dividida en **n** partes iguales.

n partes iguales

$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

m partes

El m por n $= \frac{m}{n}$

tanto cuanto

Ejemplos:

- El 40 por 50 $= \frac{40}{50}$
- El 35 por 200 $= \frac{35}{200}$
- El 300 por 1000 $= \frac{300}{1000}$
- El 750 por 5000 $= \frac{750}{5000}$

Atención

El m por n de una cantidad significa que tomamos **m** partes de un total de n partes iguales en que fue dividida la cantidad, donde n es entero positivo y m es racional positivo.



Nota

El 3 por 5 de una cantidad equivale a 3/5 de dicha cantidad.

Ejemplos:

- El 3 por 5 de 75 es:
  $3/5 \times 75 = 45$
- El 3 por 5 de 105 es:
  $3/5 \times 105 = 63$

TANTO POR CIENTO

Es el número de partes iguales que se toman de una cantidad total (unidad) dividida en 100 partes iguales.

100 partes iguales

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$

m partes

El m% $= \frac{m}{100}$

Ejemplos:

- El 4% $= \frac{4}{100}$
- El 25% $= \frac{25}{100}$
- El 108% $= \frac{108}{100}$
- El 20% $= \frac{20}{100}$

Observación

El tanto por ciento es un caso particular del tanto por cuanto, en este caso el total se divide en 100 partes iguales del cual se van a tomar "m" partes como se observa en el gráfico de la izquierda.



Recuerda

Cuando decimos el 100% de una cantidad C significa que dividimos la cantidad en 100 partes iguales y que tomamos las 100 partes. Es decir; tomamos todo C.

El 100%C = C

Por lo tanto, toda cantidad representa el 100% de sí misma.



Nota

Sea **N** un número:

75% N + 23%N = 98%N

36% N + 29%N = 65%N

89% N – 36%N = 53%N

61% N – 27%N = 34%N

N + 87%N = 187%N

N – 9%N = 91%N

Nota

$$\text{Du} = \left[100 - \frac{(100 - D_1)(100 - D_2)\ldots}{100^{n-1}}\right]\%$$

Donde:

- D_1; D_2; D_3 ... indican descuentos sucesivos.
- n: indica el número total de descuentos.
- Du: indica el descuento único, equivalente a todos los descuentos.

Nota

$$\text{Au} = \left[\frac{(100 + A_1)(100 + A_2)\ldots}{100^{n-1}} - 100\right]\%$$

Donde:

- A_1; A_2; A_3 ... indican aumentos sucesivos.
- n: indica el número total de aumentos.
- Au: indica el aumento único, equivalente a todos los aumentos.

Aplicación del tanto por ciento

$$\text{El a\% de b} = \frac{a}{100} \times b$$

Ejemplos:

- El 35% de 1000 = $\frac{35}{100} \times 1000 = 350$
- El 5% de 40 = $\frac{5}{100} \times 40 = 2$
- El 14% de 80 = $\frac{14}{100} \times 80 = 11{,}2$
- El 20% del 40% de 900
  $= \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} \times 900 = 72$
- El 4 por 5 del 50 por 10 de 60
  $= \frac{4}{5} \times \frac{50}{10} \times 60 = 240$

RELACIÓN PARTE-TODO

Para expresar en porcentaje una comparación parte-todo, basta con multiplicarle por 100%, es decir:

$$\frac{\text{Lo que hace de parte}}{\text{Lo que hace de todo}} \times 100\%$$

Ejemplos:

- ¿Qué tanto por ciento de 400 es 300?
  $\frac{300}{400} \times 100\% = 75\%$
- ¿Qué tanto por ciento de 60 es 18?
  $\frac{18}{60} \times 100\% = 30\%$
- ¿Qué tanto por ciento es 50 respecto de 40?
  $\frac{50}{40} \times 100\% = 125\%$
- ¿Qué tanto por ciento es a + b respecto de $a^2 - b^2$?
  $\frac{a + b}{a^2 - b^2} \times 100\% = \frac{a + b}{(a + b)(a - b)} \times 100\%$
  $= \left(\frac{100}{a - b}\right)\%$

DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

Ejemplos:

- ¿A qué descuento único equivale 3 descuentos sucesivos del 20%; 50% y 80%?

Resolución:

–20% –50% –80%

$\frac{80}{100} \times \frac{50}{100} \times 20\% = 8\%$

Descuento único: 100% – 8% = 92%

Por fórmula:

$$\text{Du} = \left[100 - \frac{(100 - 20)(100 - 50)(100 - 80)}{100^{3-1}}\right]\%$$

$$\text{Du} = \left[100 - \frac{80 \times 50 \times 20}{100 \times 100}\right]\%$$

$$\text{Du} = [100 - 8]\% = 92\%$$

- ¿A qué aumento único equivale 3 aumentos sucesivos del 10%; 20% y 50%?

Resolución:

+10% +20% +150%

$\frac{110}{100} \times \frac{120}{100} \times 150\% = 198\%$

Aumento único = 198% – 100% = 98%

Por fórmula:

$$\text{Au} = \left[\frac{(100 + 10)(100 + 20)(100 + 50)}{100^{3-1}} - 100\right]\%$$

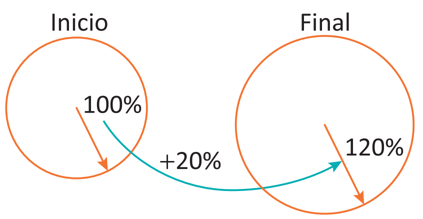
$$\text{Au} = \left[\frac{110 \times 120 \times 150}{100 \times 100} - 100\right]\%$$

$$\text{Au} = [198 - 100]\% = 98\%$$

VARIACIÓN PORCENTUAL

Ejemplo:
Sabiendo que el radio de una esfera aumenta en 20%, ¿en qué tanto por ciento aumentará su volumen?

Resolución:



$V_{inicio} = 4/3\pi(100\%)^3 \quad V_{final} = 4/3\pi(120\%)^3$

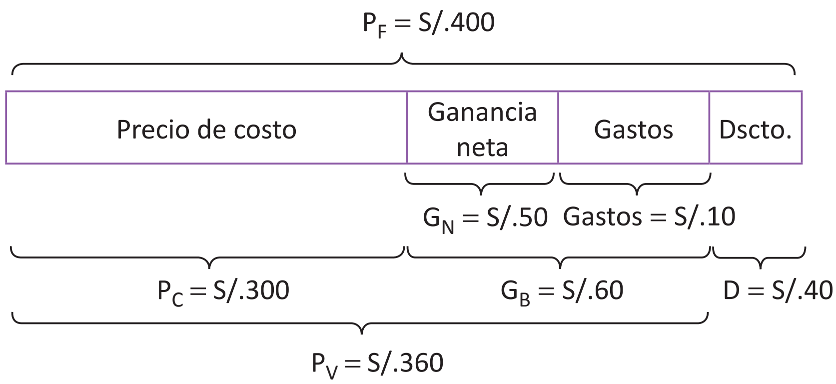
$V_{inicio} = 4/3\pi \times 100\% \quad V_{final} = 4/3\pi \times (172{,}8\%)$

+72,8%

$\therefore$ El volumen aumenta en 72,8%.

APLICACIONES COMERCIALES

Ejemplo:
Un comerciante compró un artículo en S/.300 (precio de costo: P_C) y decide ofrecerlo en S/.400 (precio fijado: P_F), sin embargo, al momento de venderlo lo hace por S/.360 (precio de venta: P_V); es decir, se realiza una rebaja de (S/.400 – S/.360 = S/.40) y se obtiene una ganancia de S/.60 (ganancia bruta: G_B); pero esta operación comercial genera gastos por S/.10; es decir se ganó realmente S/.50 (Ganancia neta: G_N).



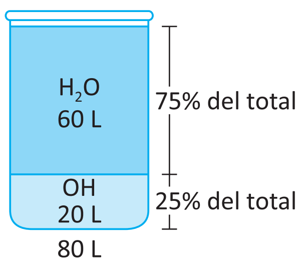
- Cuando en una operación comercial hay ganancia:

$$P_V = P_F - D \qquad P_V = P_C + G_B \qquad G_B = G_N + \text{gastos}$$

- Cuando en una operación comercial hay pérdida: $P_V = P_C - P$

PROBLEMAS SOBRE MEZCLA

Ejemplo:
Supongamos que tenemos un recipiente y que en él mezclamos 20 L de alcohol puro con 60 L de agua, entonces el resultado será una mezcla alcohólica de 80 L. Veamos gráficamente:



Entonces diremos que la mezcla tiene una pureza de 25% o una concentración de 25%. La pureza también se puede expresar en grados, en este caso la mezcla alcohólica es de 25°.



Observación

Aumento de área $= \left[2p + \left(\frac{p}{10}\right)^2\right]\%$

Donde:

p: porcentaje en que aumenta la cantidad. Esta cantidad puede ser lado, diagonal, radio, apotema de una figura regular.

Atención

- Si en una venta no hay descuento, entonces el precio de lista o precio fijado es igual al precio de venta.
- Si en una venta hay descuento, entonces el precio fijado es mayor que el precio de venta.



Atención

- Generalmente todo descuento o rebaja se expresa como un tanto por ciento del precio fijado.
- Generalmente toda ganancia se expresa como un tanto por ciento del precio de costo.

Nota

- La pureza alcohólica nos indica qué tanto por ciento representa el volumen de alcohol puro respecto del volumen total se calcula así:

$$\text{Pureza} = \frac{V_{OH}}{V_{total}} \times 100\%$$

Problemas resueltos

1 ¿Qué porcentaje de los 3/5 del 20% del 40% de 2000 es el 0,2% del 5% de 24 000?

Resolución:

Sea $x\% = \frac{x}{100}$ dicho porcentaje.

Del enunciado:

$$\frac{x}{100} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot 2000 = \frac{2}{1000} \cdot \frac{5}{100} \cdot 24\,000$$

$$x = 2{,}5$$

$\therefore$ El resultado es 2,5%.

2 Halla el (a + b)% de $\frac{1}{a^2 + ab + b^2}$ de $a^3 - b^3$ de $\frac{1}{a^2 - b^2}$ de 200.

Resolución:

Del enunciado:

$$\frac{a+b}{100} \cdot \frac{1}{a^2 + ab + b^2} \cdot (a-b)(a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot 200$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} \cdot 2 = 2$$

3 Una persona entra a un juego de 3 apuestas consecutivas perdiendo y ganando, alternadamente, 80%, 10% y 70% siempre en relación a lo que tenía o quedaba. Si se retiró con S/.66, ¿cuánto dinero perdió?

Resolución

Sea N la cantidad de dinero.
Según el enunciado:

Pierde 80%N $\Rightarrow$ queda 20%N

Gana 10%(20%N) $\Rightarrow$ tiene 110% $\times$ 20%N

Pierde 70%(110% $\times$ 20%N)

$\Rightarrow$ queda 30% $\times$ 110% $\times$ 20%N

Planteamos:

$$\frac{30}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{20}{100} \cdot N = 66$$

$$N = 1000$$

Queda con S/.66
Pierde: 1000 – 66 = S/.934

4 En una reunión, el 40% son hombres y el resto son mujeres. Después ingresan 70 hombres y salen 20 mujeres, entonces el número de hombres es el 60% del nuevo total. ¿Qué porcentaje del nuevo total de damas son las personas que ingresaron después?

Resolución:

Según los datos:
Hombres = 40k
Mujeres = 60k
Luego; ingresan 70 hombres y se retiran 20 mujeres.
Dato: (40k + 70) = 60%(100k + 70 – 20)

$$40k + 70 = \frac{60}{100}(100k + 50)$$

$$200k + 350 = 300k + 150$$

$$200 = 100k$$

$$k = 2$$

Al final: hombres = 40(2) + 70 = 150
mujeres = 60(2) – 20 = 100

Piden: $\frac{x}{100} \cdot 100 = 70$

El resultado es 70%.

5 Sea $M = 4\pi a^2 b$, donde **a** disminuye en 20% y a la vez **b** aumenta en 50%. ¿En qué tanto por ciento varía la expresión M?

Resolución:

Según las condiciones a y b son las únicas cantidades que varían y 4π es constante.

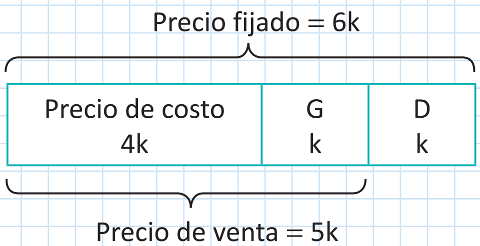
	Inicio		Final
a:	100%	–20% →	80%
b:	100%	+50% →	150%
M:	$4\pi(100\%)^2 \cdot 100\%$		$4\pi(80\%)^2 \cdot 150\%$
	$4\pi \cdot 100\% \cdot 100\%$		$4\pi \cdot 64\% \cdot 150\%$
	$4\pi \cdot 100\%$	–4% →	$4\pi \cdot 96\%$

$\therefore$ M disminuye en 4%.

7 Se vende un artículo en S/.150 con una ganancia del 25% sobre el costo. Si se ganó tanto como se descontó, ¿cuál fue el precio fijado para la venta al público?

Resolución:

Como se gana 25% del precio de costo, que es 1/4 del precio de costo, asumimos $P_C = 4k$, entonces $G = k$ y $D = k$ por condición del problema.



Por dato:

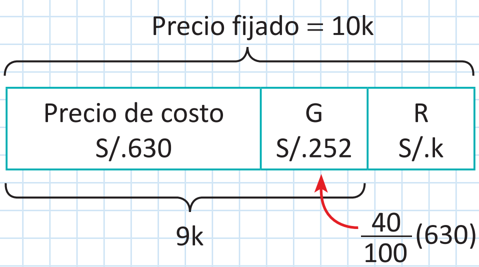
$5k = 150 \Rightarrow k = 30$

$\therefore$ Precio fijado = 6(30) = S/.180

8 Compré un televisor en S/.630. ¿En cuánto debo aumentar este precio para que durante la venta se haga una rebaja del 10% y aún así gane el 40% del precio de costo?

Resolución:

Como la rebaja es el 10% del precio fijado, es decir 1/10 del precio fijado, asumimos $P_F = S/.10k$, entonces: $R = S/.k$



Del gráfico: $9k = 630 + 252$

$9k = 882$

$k = 98$

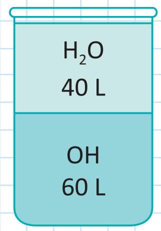
$\therefore$ El costo debe aumentar en:

$252 + 98 = S/.350$

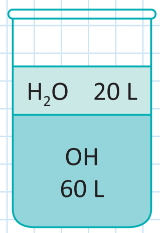
9 Se tiene un recipiente con alcohol al 60%. Si se saca la mitad del agua que contiene, ¿cuál es el nuevo porcentaje de pureza?

Resolución:

Asumimos que en el recipiente hay 100 litros.



Luego, se extrae la mitad de agua, es decir, 20 L, entonces:

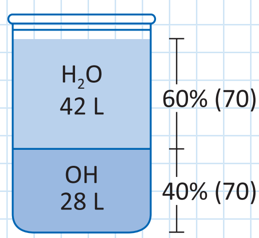


$\% \text{ pureza} = \frac{60}{80} \cdot 100\% = 75\%$

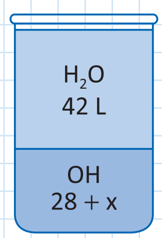
10 ¿Cuántos litros de alcohol puro debemos agregar a 70 L de una mezcla alcohólica al 40% de pureza para convertirla en una mezcla de 60% de pureza?

Resolución:

Se tiene 70 L de OH al 40%.



Se agregan "x" litros de OH.



Como la mezcla tiene una pureza del 60%, entonces el volumen de alcohol puro es el 60% del volumen total.

$28 + x = 60\%(70 + x)$

$28 + x = \frac{60}{100}(70 + x)$

$140 + 5x = 210 + 3x$

$2x = 70 \Rightarrow x = 35$

1. Si la base de un triángulo disminuye en un 25% y el área no varía, ¿en qué tanto por ciento varía su altura?

A) Aumenta 10%
B) Disminuye 5%
C) Aumenta 3%
D) Aumenta 33,3%
E) Disminuye en 15%

2. ¿Cuál es el precio al que se debe fijar un artículo para que al momento de venderlo con un descuento del 20% todavía se gane el 25% del precio de venta, sabiendo que el costo es de S/.12 000?

A) S/.20 000
B) S/.2000
C) S/.12 000
D) S/.18 000
E) S/.15 000

3. Dos artículos se ofrecen a S/.900 y S/.960; sin embargo, ambos se vendieron al mismo precio. Si el tanto por ciento de los descuentos realizados al momento de vender están en la relación de 4 a 5, ¿a qué precio se vendió cada artículo?

A) S/.180
B) S/.620
C) S/.720
D) S/.800
E) S/.900

4. Carol vendió dos autos a S/.5400 cada uno. En uno ganó el 20% y en el otro perdió el 20%. ¿Ganó o perdió y cuánto?

A) S/.230
B) S/.450
C) S/.200
D) S/.750
E) S/.540

5. La edad de A es el 30% de la edad de B. Si hace 5 años la diferencia de sus edades era 14 años, determina qué porcentaje de la edad de B representará la edad de A dentro de 20 años.

A) 26%
B) 65%
C) 70%
D) 30%
E) 45%

6. El área de una región rectangular disminuye en un 28%, a pesar de que la altura aumentó en un 60%. ¿Cómo varió la base?

A) Aumentó 45%
B) No varió
C) Disminuyó 20%
D) Disminuyó 55%
E) Aumentó 35%

7. En un corral se observa que del total de animales el 20% son patos, el 50% del resto son conejos y los 80 restantes son gallos. ¿Cuántos animales hay en total?

A) 200
B) 190
C) 250
D) 180
E) 210

8. Si el radio de un cono disminuye en 10% y su altura aumenta en 10%, ¿en qué tanto por ciento varía su volumen?

A) Aumenta en 5%
B) Aumenta en 9%
C) Aumenta en 4%
D) Disminuye en 3%
E) Disminuye en 10,9%

9. La arista de un cubo disminuye en un 10%. ¿En qué porcentaje disminuye el volumen del sólido?

A) 22% B) 25% C) 30%
D) 29% E) 27,1%

10. Se ha mezclado 60 kg de una sustancia A, de S/.5 el kilo con otra sustancia B cuyo peso representa el 25% del peso total, y se ha obtenido una sustancia cuyo precio es de S/.4 por kilo. ¿Cuál es le precio por kilo de la sustancia B?

A) S/.2 B) S/.3 C) S/.6
D) S/.1 E) S/.5

11. Si el área de la superficie de una esfera disminuye en un 36%, ¿en qué tanto por ciento disminuye su volumen?

A) 48,8% B) 51% C) 32%
D) 45% E) 43%

12. El precio A, de un artículo, se rebaja en un 20% y se obtiene un nuevo precio B. ¿En qué tanto por ciento habrá que incrementar este precio B para obtener de nuevo A?

A) 10% B) 25% C) 30%
D) 15% E) 35%

13. El a^2% de 9000 más el b^2% de 9000 es 2250. Sabiendo que el (a . b)% de 9000 excede al (a + b)% de la misma cantidad en 450, calcula el (a – b)% de 9000.

A) 100 B) 80 C) 90
D) 92 E) 70

14. Si R aumenta 20% y M disminuye 75%, entonces:

$$\frac{3M^{\frac{1}{2}}.R^2}{4}$$

A) Aumenta 44% B) Aumenta 20%
C) Disminuye 10% D) Disminuye 28%
E) Aumenta 30%

Claves

1. D	5. B	9. E	13. C
2. A	6. D	10. D	14. D
3. C	7. A	11. A	
4. B	8. E	12. B	

Reto



Si la diagonal de un hexaedro regular se incrementa en 100% (manteniendo su forma), ¿cómo varía su volumen?

Rpta.: se incrementa en 700%.

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿A qué precio se debe vender un televisor que ha costado S/.300 para ganar el 25% del precio de venta?

A) S/.200 B) S/.250 C) S/.350
D) S/.400 E) S/.450

2. Si al 60% del 85 por mil de 7 por 17 de un número se le suma la cuarta parte de su 38%, el resultado es 493. Halla el número.

A) 4250 B) 3000 C) 3850
D) 4500 E) 2850

3. Antonio vende un artefacto eléctrico ganando el 14% del precio de compra más el 5% del precio de venta. ¿Cuánto le costó el artefacto si lo vendió en 420 soles?

A) 300 soles B) 350 soles C) 420 soles
D) 340 soles E) 250 soles

4. El precio A, de un artículo, se rebaja en un 10% y se obtiene un nuevo precio B. ¿En qué tanto por ciento habrá que incrementar este precio B para obtener de nuevo A?

A) 13% B) 17,9% C) $19,\widehat{7}\%$
D) $13,\widehat{8}\%$ E) $11,\widehat{1}\%$

5. A una fiesta asisten 800 personas, donde el 40% son mujeres. ¿Cuántas mujeres deberán llegar para que el 50% de las presentes sean mujeres?

A) 100 B) 120 C) 200
D) 240 E) 160

6. Un comerciante vende 2 pantalones a 80 soles cada uno. En uno gana el 25% de su costo y en el otro pierde el 20% de su costo. ¿Ganó o perdió en la venta y cuánto?



A) Ganó S/.8 B) Ganó S/.4
C) Perdió S/.8 D) Perdió S/.4
E) No ganó ni perdió

7. ¿Cuál es el número que excede a 120 en el mismo porcentaje que 1 excede a 4/5? Da como respuesta la suma de sus cifras.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 9

8. Jaimito lleva 200 huevos al mercado y encuentra que el 10% estaban rotos y además solo pudo vender el 60% de los que no se rompieron. ¿Cuántos quedaron sin vender? (No considerar los huevos rotos).

A) 60 B) 62 C) 70
D) 72 E) 80

9. Si x% es igual a los 2/3 de los 3/4 de los 4/5 de los 25/10 de 100%, entonces halla el x% de 45.

A) 30 B) 45 C) 10 D) 20 E) 27

10. Halla el (a – b)% del 20% del $\frac{1}{a+b}$ del $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$ de 6000.

A) a – b B) 10 C) 12
D) ab E) a + b

NIVEL 2

11. Si el área de la superficie de una esfera disminuye en un 19%, ¿en qué tanto por ciento disminuye su volumen?

A) 39,7% B) 27,1% C) 13,7%
D) 21,9% E) 38,9%

12. Si al precio fijado de un producto se le rebaja el 20%, resulta que aún se gana el 20% del costo. ¿Qué fracción representa la ganancia respecto al precio fijado?

A) 15/2 B) 7/15 C) 3/20 D) 2/15 E) 4/7

13. Una señora compra 2750 huevos por S/.1000, pero se le rompen 350 y vende los restantes a S/.7 la docena. ¿Cuál es el tanto por ciento de ganancia?

A) 30% B) 15% C) 42% D) 10% E) 40%

14. El 60% de los alumnos matriculados aprobaron ciencias y el 72% aprobaron letras. Si el 10% no aprobaron curso alguno (ni ciencias, ni letras), ¿qué tanto por ciento aprobaron solo uno de dichos cursos?



A) 42% B) 48% C) 60%
D) 90% E) 76%

15. Si tú tienes 20% más de lo que yo tengo y él tiene $33,\widehat{3}\%$ menos de lo que tú tienes, ¿qué tanto por ciento de lo que yo tengo es lo que él tiene?

A) 60% B) 52,8% C) 80%
D) 57,9% E) 70,9%

16. Un postulante tiene ya 85 respuestas acertadas de 100 preguntas contestadas. ¿Cuál es el mínimo número de preguntas que debe contestar para que el tanto por ciento de respuestas acertadas sea el 90%?

A) 50 B) 30 C) 80
D) 60 E) 70

17. Dos descuentos sucesivos del 10% y 20% equivalen a un único descuento del x%. Tres aumentos sucesivos del 10%, 20% y 10% equivalen a un único aumento del y%. Halla: x + y

A) 78 B) 73,2 C) 69,7
D) 71,2 E) 69,5

18. Una camisa cuesta 5 veces lo que cuesta una corbata. Si compro ambos artículos me rebajan la camisa en 30% y la corbata en 20%, y así quedaría beneficiado con una rebaja de S/.357. ¿Cuál es el precio de la corbata?

A) S/.220 B) S/.207 C) S/.190
D) S/.180 E) S/.210

19. El a^2% de 9000 más el b^2% de 9000 es 2250. Sabiendo que el (a . b)% de 9000 excede al (a + b)% de la misma cantidad en 450, calcula el (a – b)% de 9000.

A) 70 B) 40 C) 80 D) 30 E) 90

20. Cuando el largo de un rectángulo aumenta en 10% y el ancho disminuye en 10%, el área del rectángulo disminuye en 80 m^2. ¿Cuál era el área del rectángulo inicial?

A) 4500 m^2 B) 8000 m^2 C) 4000 m^2
D) 3700 m^2 E) 6000 m^2

NIVEL 3

21. El 33,3% del valor de A es igual a lo que queda de B después de descontarle su 500/7%; ¿qué tanto por ciento representa el valor de B respecto de A?

A) $131,\widehat{9}\%$ B) $116,\widehat{6}\%$ C) $119,\widehat{7}\%$
D) $121,\widehat{7}\%$ E) $131,\widehat{7}\%$

22. Un comerciante compra 80 casacas de cuero a 200 soles cada una. Una parte de ellas las vendió ganando el 10% y las sobrantes ganando el 20%. Si este negocio le ocasiona una ganancia de 2800 soles, ¿cuántas casacas de cuero vendió ganando el 10%?

A) 10 B) 18 C) 20
D) 24 E) 36

23. Tres personas almuerzan juntas en un restaurante. Se sabe que lo que comió la primera es 1/5 del total y lo que comió la tercera es el 70% de lo que comió la segunda. Si la tercera pagó S/.84 por lo que comió, ¿cuánto tuvo que pagar la primera persona?



A) S/.51 B) S/.68 C) S/.56
D) S/.60 E) S/.49

24. Pepito se presenta a una empresa para trabajar y observa que debe rendir 3 exámenes, los cuales son exámenes cancelatorios. En el primer examen, de cada 5 aprobaron 3. En el segundo examen, por cada 2 aprobados hay 3 desaprobados. En el tercer examen, aprobaron tantos como los que desaprobaron. El total de desaprobados en el segundo examen excede al total de desaprobados en el tercer examen en 60. Calcula el total de postulantes.

A) 260 B) 280 C) 250
D) 320 E) 350

25. Si **a** hombres tienen alimentos disponibles a razón de **b** raciones diarias durante **d** días. Si el 60% de los hombres se retira y el resto se sirven 2b/3 raciones diarias, ¿para qué tanto por ciento más de días alcanzarán los víveres?

A) 275% B) 260% C) 225%
D) 125% E) 240%

26. Se sabe que una tela al ser lavada se encoge 10% en el ancho y 20% en el largo. Si la tela tiene 2 metros de ancho, ¿qué longitud debe comprarse para obtener 72 m^2 después de lavarla?

A) 20 m B) 25 m C) 30 m
D) 40 m E) 50 m

27. Una máquina remalladora ha hecho el 30% de una prenda y se le aumenta en 40% su rendimiento con lo cual termina la prenda 2 horas antes de lo previsto. Si no hubiese aumentado su rendimiento, ¿en cuánto tiempo hubiera acabado toda la prenda?



A) 6 h B) 8 h C) 12 h D) 7 h E) 10 h

28. En una mezcla de arena y piedra el 75% del peso es arena. Se extraen 50 kg de arena y queda una mezcla con $66,\widehat{6}\%$ de arena. ¿Cuál es el peso de la mezcla resultante?

A) 200 kg B) 300 kg C) 280 kg
D) 370 kg E) 150 kg

29. Se ha mezclado 60 kg de una sustancia A, de S/.5 el kilo con otra sustancia B cuyo peso representa el 25% del peso total, y se ha obtenido una sustancia cuyo precio es de 4 soles por kilo. ¿Cuál es el precio por kilo de la sustancia B?

A) S/.1 B) S/.2 C) S/.3
D) S/.4 E) S/.5

30. Si el área lateral de un cilindro aumenta en 40%, ¿en qué porcentaje varía el área de su base, si la altura permanece constante?

A) 85% B) 93% C) 89%
D) 96% E) 92%

Claves

NIVEL 1	7. C	13. E	20. B	26. E
1. D	8. D	14. B	**NIVEL 3**	27. E
2. A	9. B	15. C	21. B	28. E
3. B	10. C	16. A	22. C	29. A
4. E	**NIVEL 2**	17. B	23. A	30. D
5. E	11. B	18. E	24. C	
6. D	12. D	19. E	25. A	

Magnitudes proporcionales

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Se dice que 2 magnitudes son directamente proporcionales (DP) cuando el cociente de sus valores correspondientes es constante.
Ejemplo:

n.° de lápices	16	48	8
Costo (S/.)	30	90	15

(De 16 a 48: ×3; de 16 a 8: ÷2. De 30 a 90: ×3; de 30 a 15: ÷2.)

Se observa que al aumentar o disminuir el valor de una de ellas, la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción.

$$\frac{\text{n.° de lápices}}{\text{Costo}} = \frac{16}{30} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} = \text{cte.}$$

$$(\text{n.° de lápices})\ \text{DP}\ (\text{Costo}) \Rightarrow \frac{\text{n° de lápices}}{\text{Costo}} = k$$

Atención

Si A DP B:

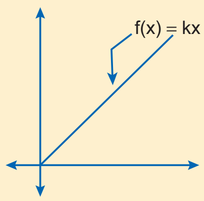
$$\frac{\text{Valor de A}}{\text{Valor de B}} = k$$

Sean: **y** el valor de A
x el valor de B

Entonces: $\frac{y}{x} = k$
$\Rightarrow y = kx$

Además $y = f(x)$
$\therefore f(x) = kx$

Donde: f(x) es una función de proporcionalidad directa.





MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Se dice que 2 magnitudes son inversamente proporcionales (IP) cuando el producto de sus valores correspondientes es constante.
Ejemplo:

n.° de obreros	15	30	5
n.° de días	20	10	60

(De 15 a 30: ×2; de 15 a 5: ÷3. De 20 a 10: ÷2; de 20 a 60: ×3.)

Se observa que al aumentar o disminuir el valor de una de ellas, la otra también disminuye o aumenta, respectivamente, en la misma proporción.

$$\text{n.° de obreros} \times \text{n.° de días} = 15 \times 20 = 30 \times 10 = 5 \times 60 = \text{cte.}$$

$$(\text{n.° de obreros})\ \text{IP}\ (\text{n.° de días}) \Rightarrow \text{n.° de obreros} \times \text{n.° de días} = k$$

Atención

Si A IP B:

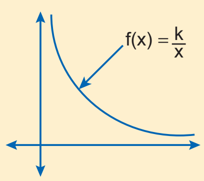
$$\left(\begin{matrix}\text{Valor}\\ \text{de A}\end{matrix}\right) \times \left(\begin{matrix}\text{Valor}\\ \text{de B}\end{matrix}\right) = k$$

Sean: **y** el valor de A
x el valor de B

Entonces: $y \cdot x = k$
$\Rightarrow y = \frac{k}{x}$

Además: $y = f(x)$
$\therefore f(x) = \frac{k}{x}$

Donde: f(x) es una función de proporcionalidad inversa.





Otros ejemplos:

1. Si **A** es DP a **B**, halla a.

Magnitud A	8	40
Magnitud B	13	a

$\Rightarrow \frac{8}{13} = \frac{40}{a} \Rightarrow a = 65$

2. Si **M** es IP a **N**, halla b.

Magnitud M	6	3
Magnitud N	4	b

$\Rightarrow 6 \cdot 4 = 3b \Rightarrow b = 8$

COMPARACIÓN SIMPLE

Cuando de todas las magnitudes solo varían dos de ellas y las demás permanecen constantes.

Ejemplo:

n obreros pueden pintar un muro de 120 m de largo, pero si el muro fuese 40 m más largo, se necesitarían 5 obreros más. Calcula "n".

Resolución:

n.° de obreros	Longitud
n	120 m
n + 5	160 m

$$(\text{n.° de obreros})\ \text{DP}\ (\text{longitud}) \Rightarrow \frac{n}{120} = \frac{n+5}{160}$$

(120 simplificado a 3; 160 simplificado a 4)

$$4n = 3n + 15$$

$$n = 15$$

∴ El valor de "n" es 15.



Atención

Si A es IP $a\sqrt[3]{B}$, sabiendo que A vale 35, cuando B es 27, ¿cuánto vale A, cuando B vale 216?

Resolución:

$A \text{ IP } \sqrt[3]{B}$

$\Rightarrow A \times \sqrt[3]{B} = k$

$35 \times \sqrt[3]{27} = A\sqrt[3]{216}$

$35 \times 3 = A \times 6$

$A = 17{,}5$

COMPARACIÓN COMPUESTA

Cuando de todas las magnitudes relacionadas varían más de dos de ellas.

Ejemplo:

12 costureras tejen 80 chompas en 3 días trabajando 6 h/d. ¿En qué tiempo 10 costureras que son el triple de eficientes que las anteriores harán 100 chompas que son 3 veces más difíciles que las anteriores trabajando 9 h/d?

Resolución:

Días: IP Costureras; DP Chompas; IP h/d; IP Eficiencia; DP Dificultad

Costureras	Chompas	Días	h/d	Eficiencia	Dificultad
12	80	3	6	1	1
10	100	x	9	3	4

(Dificultad: de 1 a 4, 3 veces más)

Respecto a sus valores:

$$\frac{\text{Días} \times \text{Costureras} \times \text{h/d} \times \text{Eficiencia}}{\text{Chompas} \times \text{Dificultad}} = K \Rightarrow \frac{x \cdot 10 \cdot 9 \cdot 3}{100 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 1}{80 \cdot 1}$$

$$x = 4$$

∴ En 4 días.

Atención

(n.° de días) IP (n.° de costureras)
(n.° de días) DP (n.° de chompas)
(n.° de días) IP (h/d)
(n.° de días) IP (Eficiencia)
(n.° de días) DP (Dificultad)



PROPIEDADES

Sean las magnitudes A; B; C y D se cumple:

1. Si: A DP B ⟶ A IP (1/B)
   A IP B ⟶ A DP (1/B)
2. Si: A DP B ⟶ A^n DP A^n
   A IP B ⟶ A^n IP B^n
3. Si: A DP B; A IP C; A DP D ⟶ $\frac{A \cdot C}{B \cdot D} = k$

Nota

Si:

A	DP	B^2
A	IP	$\sqrt{C}$
A	IP	D
A	DP	$\sqrt[3]{E}$
A	DP	F^2

$$\Rightarrow \frac{A \times \sqrt{C} \times D}{B^2 \times \sqrt[3]{E} \times F^2} = k$$

Problemas resueltos

1 Dos veteranos de guerra tienen pensiones que son DP a las raíces cuadradas del número de disparos que acertaron al blanco. Si el primero acertó 24 disparos más que el segundo y sus pensiones están en la relación de 91 a 65, ¿cuántos balazos acertó el segundo?

Resolución:

Sea "x" el número de balazos que acertó el segundo, entonces:

$$\frac{\text{Pensión}}{\sqrt{\text{disparos}}} = k$$

$$\frac{91}{\sqrt{x+24}} = \frac{65}{\sqrt{x}}$$

$$7\sqrt{x} = 5\sqrt{x+24}$$

$$49x = 25(x+24)$$

$$49x = 25x + 25 \cdot 24$$

$$24x = 25 \times 24$$

$$\therefore x = 25$$

2 El sueldo de un obrero es proporcional al cuadrado de la edad que tiene. Si actualmente tiene 18 años, ¿dentro de cuántos años cuadruplicará su sueldo?

Resolución:

Sea "x" los años que transcurren para que cuadruplique su sueldo, entonces:

$$\frac{\text{sueldo}}{\text{edad}^2} = k$$

$$\frac{S}{18^2} = \frac{4S}{(18+x)^2}$$

$$(18+x)^2 = 18^2 \cdot 2^2$$

$$18 + x = 18 \cdot 2$$

$$\therefore x = 18$$

3 El peso de un disco es DP al cuadrado de su radio y también a su espesor. Si un disco metálico pesa 5 kg, ¿cuánto pesará otro disco del mismo material, pero con el doble de radio y el triple de espesor?

Resolución:

Sea "x" el peso del otro disco, entonces:

$$\frac{\text{peso}}{r^2 \cdot \text{espesor}} = K$$

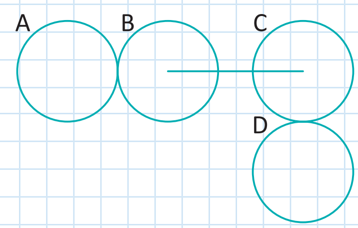
$$\frac{5}{r^2 \cdot e} = \frac{x}{(2r)^2 \cdot 3e}$$

$$x = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$x = 60 \text{ kg}$$

4 Cuatro ruedas A; B; C y D de 60; 30, 40 y 80 dientes respectivamente, se disponen de manera que a engrana con B, B está unida por un eje con C y está engrana con D. Si la rueda D dio 75 vueltas en 3 minutos, ¿cuántas vueltas dio la rueda A en 1 minuto?

Resolución:



$$d_C \times V_C = d_D \times V_D$$

$$40 \times V_C = 80 \times 75$$

$$V_C = 150 \Rightarrow V_B = 150$$

$$d_A \times V_A = d_B \times V_B$$

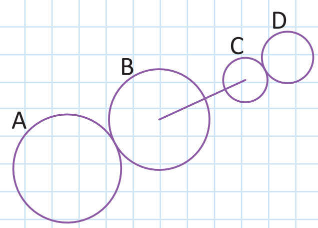
$$60 \times V_A = 30 \times 150$$

$$V_A = 75$$

$\therefore$ En 1 minuto la rueda A da 25 vueltas.

5 Una rueda "A" de 80 dientes engrana con otra rueda "B" de 50 dientes, B está unido por un eje con "C" de 15 dientes que engrana con una rueda D de 25 dientes. Si la rueda A da 125 vueltas por minuto, calcula la diferencia de vueltas de las ruedas B y D.

Resolución:



$$d_A \times V_A = d_B \times V_B$$

$$80 \times 125 = 50 \times V_B$$

$$V_B = 200 \Rightarrow V_C = 200$$

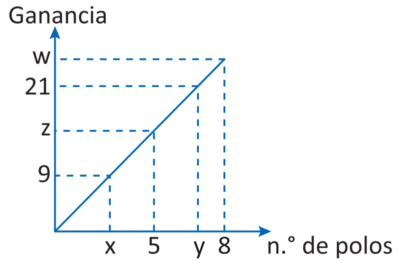
$$d_C \times V_C = d_D \times V_D$$

$$15 \times 200 = 25 \times V_D$$

$$V_D = 120$$

Piden: $V_C - V_D = 80$

6 Un confeccionista por cada 2 polos que vende gana S/.6. Luego de realizar 4 ventas esbozó el siguiente gráfico.



Calcula: $x + y + z + w$

Resolución:

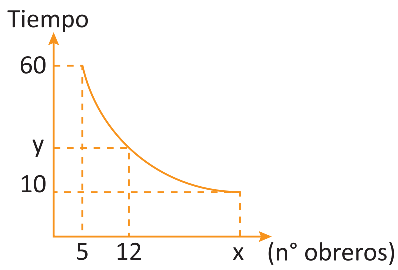
El gráfico que se muestra representa a dos magnitudes directamente proporcionales, entonces el cociente de sus valores es constante.

$$\frac{x}{9} = \frac{5}{z} = \frac{y}{21} = \frac{8}{w} = \frac{2}{6}$$

$$\Rightarrow x = 3;\ z = 15;\ y = 7;\ w = 24$$

$$\therefore\ x + y + z + w = 3 + 7 + 15 + 24 = 49$$

7 El gráfico muestra dos magnitudes inversamente proporcionales. Halla $x + y$.



Resolución:

Como las magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de sus valores es constante.

$$10 . x = 60 \times 5 \quad \wedge \quad 12y = 60 \times 5$$

$$\Rightarrow x = 30 \quad \wedge \quad \Rightarrow y = 25$$

$$\therefore\ x + y = 30 + 25 = 55$$

8 Si se cumple que: $f(12) = 18$;

calcula: $E = \dfrac{f(7) \times f(10)}{f(9)}$

Sabiendo que $f(x)$ es una relación de proporcionalidad directa.

Resolución:

$$f(12) = 18$$

$$12k = 18$$

$$k = \frac{3}{2}$$

$$E = \frac{f(7) \times f(12)}{f(9)} = \frac{7k \times 12k}{9k} = \frac{28k}{3}$$

$$E = \frac{28}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = 14$$

9 Siendo $f(x)$ una función de proporcionalidad inversa, halla:

$E = \dfrac{f(10) \times f(15)}{f(7)}$ si: $f(6) = 14$.

Resolución:

$$f(6) = 14$$

$$\frac{k}{6} = 14 \Rightarrow k = 84$$

$$E = \frac{f(10) \times f(15)}{f(7)} = \frac{\frac{k}{10} \times \frac{k}{15}}{\frac{k}{7}} = \frac{7k}{150}$$

$$E = \frac{7}{150}(84) = \frac{98}{25}$$

10 Sea "F" una función de proporcionalidad directa, tal que: $F(4) + F(6) = 20$

calcula: $E = \dfrac{F(31)}{7} \times F(7) \times F(3)$

Resolución:

$$F(4) + F(6) = 20$$

$$4k + 6k = 20$$

$$10k = 20$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$E = \frac{F(31)}{7} \times F(7) \times F(3)$$

$$E = \frac{31k}{7} \times 7k \times 3k$$

$$E = 93k^3$$

$$E = 93(2^3)$$

$$E = 744$$

Actividades de razonamiento

1. Una rueda A de 30 dientes engrana con otra rueda B de 12 dientes, la cual está conectada mediante un eje con otra rueda C que engrana con D. Si el número de dientes de estas dos últimas ruedas están en la relación de 9 y 7, ¿cuántas vueltas dará la rueda D en 2 minutos, si la rueda A da 28 vueltas en 1 minuto?

A) 150 vueltas B) 120 vueltas C) 90 vueltas
D) 180 vueltas E) 200 vueltas

2. Se tiene las ruedas M; C; A y N, donde M y C tienen un eje común, C y A están engranadas, A y N tiene un eje común. Si la rueda M da 75 vueltas por minuto y N, 25 vueltas por minuto. Determina el número de dientes de la rueda C, si esta tiene 20 dientes menos que A.

A) 30 dientes B) 10 dientes C) 20 dientes
D) 15 dientes E) 25 dientes

3. Se sabe que "A" es DP a B^3 (cuando "C" es constante) y C IP $\sqrt{A}$ (cuando "B" es constante). En la siguiente tabla, calcula "x".

A	60	x
B	6	10
C	9	15

A) 100 B) 200 C) 150 D) 120 E) 180

4. Se sabe que:
A DP $\sqrt{B}$ (C: cte) y C^2 DP $\sqrt{A}$ (B: cte)
Calcula n, en:

A	96	648
B	9	n
C	2	3

A) 8 B) 4 C) 16 D) 2 E) 9

5. El valor de una joya varía en forma directamente proporcional al cuadrado de su peso. ¿Cuánto se perderá al partir una joya que costó S/.2997, en 3 partes cuyos pesos son entre sí como 4; 3 y 2, respectivamente?

A) S/.1073 B) S/.1936 C) S/.1948
D) S/.1572 E) S/.1924

6. El precio de una piedra preciosa es directamente proporcional al cubo de su peso. Al soltarse se rompe en 3 pedazos cuyos pesos son proporcionales a 2; 3 y 5. Si la piedra vale S/.10 000, ¿cuál es la pérdida?

A) S/.9600 B) S/.1600 C) S/.7200
D) S/.8400 E) S/.5400

7. El precio de un adobe es proporcional a su peso e inversamente proporcional a su volumen. Un adobe de densidad 1,5 gr/cc cuesta S/.9. ¿Cuánto costará un adobe de 600 cc que pesa 1,2 kg?

A) S/.15 B) S/.18 C) S/.12 D) S/.10 E) S/.20

8. El costo de un terreno es IP al cuadrado de la distancia que lo separa de Lima y DP a su área. Un terreno cuesta 540 mil y otro de doble área y situado a una distancia 3 veces mayor. ¿Qué precio tendrá, este último?

A) S/.67 800 B) S/.67 500 C) S/.67 350
D) S/.57 600 E) S/.58 500

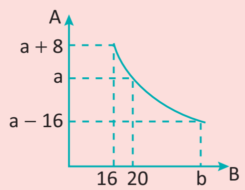
9. En un edificio el volumen de agua que se lleva a un cierto piso es IP a T^n; donde T es el tiempo que demora en llegar el agua al piso n. si cuando se lleva 80 litros al segundo piso se demora 4 minutos, ¿qué tiempo demorará en llegar 5 litros al octavo piso?

A) 2 min B) 1 min C) 4 min D) 8 min E) 5 min

10. La resistencia eléctrica de un conductor es proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro "D". ¿Qué sucede con la resistencia, si su longitud disminuye en sus 4/9 y el diámetro se reduce a la tercera parte?

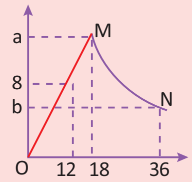
A) Se duplica B) Se triplica C) Se quintuplica
D) Se cuadruplica E) Se reduce a la mitad

11. El gráfico muestra dos magnitudes A y B que son inversamente proporcionales. Halla a $\times$ b.



A) 960 B) 720 C) 480 D) 320 E) 1280

12. Del gráfico, la línea OM indica una relación directa y la línea MN una relación inversa. Calcula "a + b".



A) 20 B) 15 C) 24 D) 18 E) 30

13. A y B son 2 magnitudes tales que:

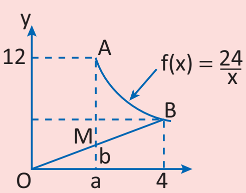
A es DP a B^2; si $B \leq \sqrt{5}$

A es IP a B ; si $B \geq \sqrt{5}$

Si A = 6 cuando $B = \sqrt{3}$, halla A cuando $B = 2\sqrt{5}$.

A) 3 B) 5 C) 8 D) 4 E) 6

14. En la gráfica siguiente la línea OB representa una relación de proporcionalidad directa. Calcula a + b.



A) 4 B) 7 C) 5 D) 6 E) 8

Claves

1. D	5. E	9. A	13. B
2. B	6. D	10. C	14. C
3. A	7. C	11. E	
4. C	8. B	12. D	

Reto



Se tienen 2 magnitudes; A y B. En el siguiente cuadro se muestran los valores que toman sus variaciones. Halla "x".

A	2	3	4	6	12
B	72	32	18	8	x

Rpta.: x = 2

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Un muchacho vive en el sexto piso de un edificio. Calcula cuánto tarda en subir hasta su casa, si llega al tercer piso en 30 segundos.

   A) 60 s B) 70 s C) 40 s D) 15 s E) 35 s

2. Seis trabajadores han botado un desmonte en 8 horas. Cinco trabajadores, de igual rendimiento que los anteriores, ¿en qué tiempo hubieran hecho el mismo trabajo?

   A) 11 h B) 8,5 C) 10,5 h
   D) 8,6 h E) 9,6 h

3. Una cuadrilla de 20 obreros realiza una obra en 6 días. ¿En cuántos días realiza la obra otra cuadrilla de 8 obreros 40% menos eficientes?

   A) 15 B) 35 C) 25 D) 20 E) 30

4. En una fábrica de refrescos, 5 máquinas embotelladoras llenan 7200 envases en 6 horas. ¿Cuántos envases llenarán 7 máquinas en 8 horas?

   A) 14 200 B) 15 200 C) 12 600
   D) 13 800 E) 13 440

5. Ocho pintores tardan 20 días en pintar 4000 m^2 en un edificio. ¿Cuánto tardarán 10 pintores en pintar 6000 m^2 de otro edificio?

   A) 20 días B) 40 días C) 35 días
   D) 24 días E) 30 días

6. Una empresa requiere 30 obreros para hacer una obra en 3 meses trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos obreros necesitarán para terminar la obra en 2 meses trabajando 6 horas diarias?

   A) 45 B) 60 C) 40 D) 35 E) 50

7. J y M son magnitudes inversamente proporcionales. Cuando J es 4/3, M vale 5/16. Calcula el valor de J cuando M es 25/6.

   A) 1/10 B) 2/9 C) 2/7 D) 3/7 E) 1/8

NIVEL 2

8. El cuadrado de una magnitud A es inversamente proporcional al triple de una magnitud B. Si A toma el valor de 5 cuando B toma el valor de 2, calcula el doble de B, cuando A toma el valor de 2.

   A) 22 B) 27 C) 33 D) 25 E) 30

9. El cuadrado de M es directamente proporcional a la raíz cuadrada de N, e inversamente proporcional a P. En un momento dado, M es 2, N es 9 y P es 3. Si N varía a 64 y P varía a 2, ¿cuál será el cambio porcentual de M?

   A) 150% B) 100% C) 80%
   D) 200% E) 120%

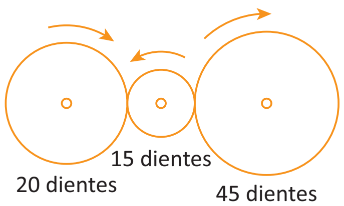
10. Las magnitudes S y T son inversamente proporcionales. ¿En qué porcentaje cambiará T, si S aumenta 10%?

A) $\left(\frac{100}{11}\right)\%$ B) 9% C) 7% D) 10% E) 8%

11. M y N son magnitudes inversamente proporcionales. Cuando a M se le disminuye 5, N aumenta 4 unidades. Calcula el valor de: $J = 16M - 20N$

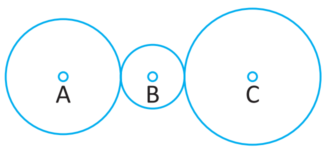
A) 40 B) 70 C) 80 D) 50 E) 60

12. Observa el gráfico. ¿Cuántas vueltas habrá dado el engranaje de la derecha cuando el de la izquierda haya dado 36 vueltas?



A) 23
B) 16
C) 18
D) 19
E) 20

13. En la figura, el engranaje central (15 dientes) realiza 240 vueltas. ¿Cuál es el exceso de vueltas que realiza el engranaje de la izquierda (45 dientes) sobre el de la derecha (60 dientes)?



A) 10 vueltas
B) 40 vueltas
C) 50 vueltas
D) 20 vueltas
E) 30 vueltas

14. Dos bombas trabajando 5 horas diarias durante 4 días, logran bajar el nivel del agua en 65 cm. ¿En cuántos días, 3 bombas similares, bajarán el nivel en 78 cm funcionando 8 horas diarias?

UNMSM 2004-II

A) 310 B) 6 C) 2 D) 8 E) 4

15. Si A es DP a B, calcula $(a + 2)^3$.

A	4	8	16
B	a	2a	$4a^2$

A) 25 B) 36 C) 27 D) 28 E) 30

16. Si R es DP a T, calcula $\left(\frac{x^x + x}{x}\right)$, sabiendo que x es un número entero.

R	(x + 9)	(x – 27)
T	3	(x – 9)

A) 14 B) 8 C) 7 D) 12 E) 10

NIVEL 3

17. Si A es IP a B y DP a C, calcula x + y.

A	8	x	24
B	6	15	y
C	4	5	6

A) 5 B) 7 C) 4 D) 2 E) 6

(18) Una rueda de 48 dientes, que desarrolla 168 revoluciones en un minuto, está unida a un engranaje que gira 20 160 veces en una hora. ¿Cuántos dientes tiene el segundo engranaje?

A) 24 B) 28 C) 32 D) 20 E) 16

(19) En la siguiente tabla, las magnitudes Q y W son inversamente proporcionales, y P es un número entero mayor que 1:

Q	4	2	0,8
W	P	$P^{(3/2)}$	$P^2 + 4$

Completa la tabla y da como respuesta la suma de las cifras de P^4.

A) 8 B) 11 C) 10 D) 7 E) 13

(20) Se sabe que las magnitudes F y G tienen una relación de proporcionalidad que obedece a la tabla siguiente:

F	3	$x + y$	$9(x - y)$	75
G	4	8	4z	100

Si x equivale al doble de y, calcula el valor de $x + y + z$.

A) 12 B) 10 C) 6 D) 14 E) 8

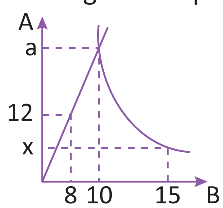
(21) En cierta ciudad, el precio del café varía en forma DP al precio del azúcar e IP al precio del té. ¿Cómo varía el precio del café cuando el precio del té sube en 20% y el precio del azúcar baja en 10%?

A) Disminuye 75% B) Aumentó 20%
C) Disminuye 30% D) Aumenta 10%
E) Disminuye 25%

(22) Si $(P^2 + Q^2)$ es DP a $(P^2 - Q^2)$, siendo la constante de proporcionalidad 13/5, entonces sí "P" es DP a "Q", entonces su constante de proporcionalidad es:

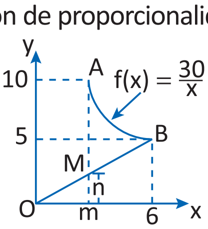
A) 3/2 B) 1/2 C) 3/4 D) 2/3 E) 3/5

(23) En la figura adjunta, halla el valor de "x + a", si "A" y B" son magnitudes proporcionales.



A) 25
B) 23
C) 27
D) 20
E) 30

(24) En la gráfica siguiente la línea $\overline{OB}$ representa una relación de proporcionalidad directa. Calcula "m + n".



A) 5,5
B) 6
C) 4
D) 7
E) 3

Claves

NIVEL 1	NIVEL 2		
1. A	8. D	15. C	22. A
2. E	9. B	16. E	23. A
3. C	10. A	NIVEL 3	24. A
4. E	11. C	17. B	
5. D	12. B	18. A	
6. B	13. D	19. E	
7. A	14. C	20. A	
		21. E	

Orden de información

DEFINICIÓN

Son situaciones prácticas y concretas que se presentan en la vida cotidiana.

ORDENAMIENTO CIRCULAR

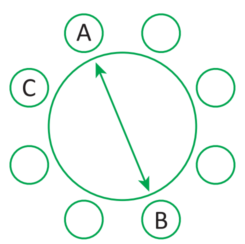
Este tipo de problemas consiste en ubicar los datos dados alrededor de un objeto formando así una línea cerrada (circunferencia).

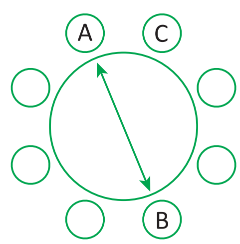
Ejemplo:
7 amigos ocupan una mesa circular de 8 asientos distribuidos simétricamente. Sus nombres son: Andy, Brandon, Candy, David, Ericka, Francesca y Gisela.
Se sabe que:

- Andy se sienta frente a Brandon y junto a Candy.
- David se sienta frente a Candy.
- Adyacente a Ericka y Brandon está el asiento vacío.
- Francesca no se sienta junto ni a la derecha de David.

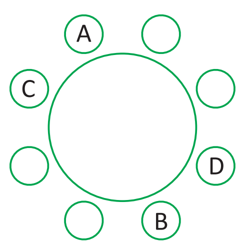
Indica quién se ubica frente al sitio vacío.

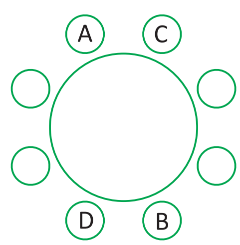
Resolución:
Andy se sienta frente a Brandon y junto a Candy.
Conclusión: existen 2 posibles ordenamientos.



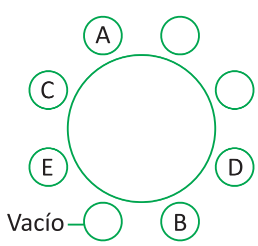


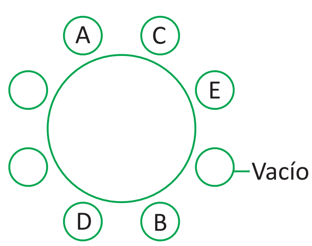
David se sienta frente a Candy.





Adyacente a Ericka y Brandon está el asiento vacío.





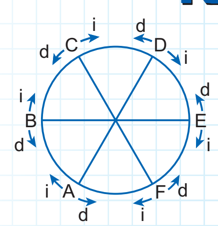
Francesca no se sienta junto ni a la derecha de David.

Recuerda

El primer sujeto en ubicar en una distribución circular puede ocupar cualquiera de los lugares.



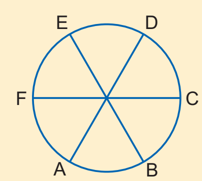
Nota



d: derecha
i: izquierda

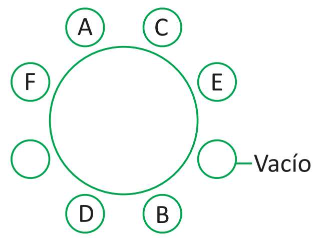


Observación

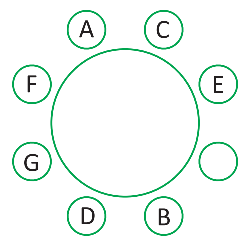


- Junto y a la derecha de A está B.
- A la derecha de A están B y C.

Conclusión: se descarta el 1.er ordenamiento.



Completando:



∴ Francesca se ubica frente al sitio vacío.

ORDENAMIENTO POR CUADROS DE DOBLE ENTRADA

Consiste en establecer una correspondencia entre los sujetos y sus características.

Ejemplo:

Aldair, Axel, José y Marco son estudiantes de diferentes especialidades: Economía, Física, Química y Matemática. Los nombres de sus enamoradas son: Amira, Giuliana, Cristina y Dina. Ni las especialidades ni los nombres de sus enamoradas guardan necesariamente el orden respectivo.

Se sabe que:

I. La enamorada del que estudia Economía se llama Amira.

II. Marco estudia Química.

III. El que estudia Física es enamorado de Dina.

IV. Aldair es enamorado de Giuliana.

V. Marco y Dina son hermanos.

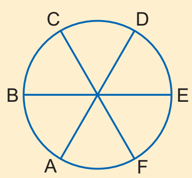
VI. Amira y Cristina son compañeras de promoción de la enamorada de José.

Indica el nombre de la enamorada y la especialidad de cada estudiante.

Resolución:
Construimos el cuadro convenientemente, separando entre las especialidades y el nombre de las enamoradas, para colocar ordenadamente los datos.

	ENAMORADAS				ESPECIALIDADES			
	Amira	Giuliana	Cristina	Dina	Economía	Física	Química	Matemática
Aldair								
Axel								
José								
Marco								

Atención

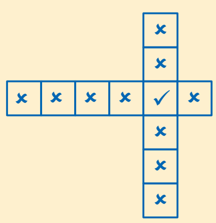


A está a la derecha de B.
A está junto y a la derecha de B.
A está a la derecha de C.
A está a la izquierda de F.
A está junto y a la izquierda de F.
A está a la izquierda de E.
A está frente a D.



Importante

Cuando en un cuadro se coloca SÍ ✓, entonces la fila y columna que contiene el SÍ ✓, se completa con NO ×.





Marco y Dina son hermanos, además Marco estudia Química.
Conclusión:
Dina no es enamorada de Marco.
Amira y Cristina son compañeras de promoción de la enamorada de José.
Conclusión:
La enamorada de José no es Amira ni Cristina.

	ENAMORADAS				ESPECIALIDADES			
	Amira	Giuliana	Cristina	Dina	Economía	Física	Química	Matemática
Aldair							✗	
Axel							✗	
José	✗		✗				✗	
Marco				✗	✗	✗	✓	✗

Aldair es enamorado de Giuliana.
Conclusión: Aldair no estudia economía ni física y José es enamorado de Dina.

Completando el cuadro:

	ENAMORADAS				ESPECIALIDADES			
	Amira	Giuliana	Cristina	Dina	Economía	Física	Química	Matemática
Aldair	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	
Axel		✗		✗			✗	
José	✗	✗	✗	✓			✗	
Marco		✗		✗	✗	✗	✓	✗

La enamorada del que estudia economía se llama Amira.
Conclusión:
Ni Aldair ni José estudian economía y Marco tampoco, entonces ninguno de ellos es enamorado de Amira.

Completando el cuadro:

	ENAMORADAS				ESPECIALIDADES			
	Amira	Giuliana	Cristina	Dina	Economía	Física	Química	Matemática
Aldair	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	
Axel	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
José	✗	✗	✗	✓	✗		✗	
Marco	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗

El que estudia Física es enamorado de Dina.

	ENAMORADAS				ESPECIALIDADES			
	Amira	Giuliana	Cristina	Dina	Economía	Física	Química	Matemática
Aldair	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✓
Axel	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
José	✗	✗	✗	✓	✗	✓	✗	✗
Marco	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗

Finalmente:
Aldair - Giuliana - Matemática
Axel - Amira - Economía
José - Dina - Física
Marco - Cristina - Química

Importante

Si en una fila o columna, todos los casilleros son No ✗, menos uno que está en blanco, entonces, ahí se colocará: SÍ ✓

✗ ✗ ✗ _ ✗

✗
_
✗
✗
✗



Observación

En algunos problemas no es necesario llenar completamente el cuadro para responder a la pregunta.



Problemas resueltos

1 6 amigos se sientan alrededor de una mesa circular en forma simétrica. Sus nombres son: Michael, Nico, Peter, Beto, Tito y Harold. Se sabe que:

- Michael se sentó junto y a la derecha de Nico y frente a Peter.
- Tito no se sentó junto a Peter.

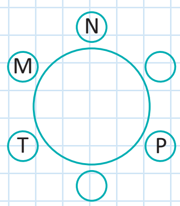
a) ¿Cuántos ordenamientos posibles existen?

b) Si Beto no se sentó frente a Nico, ¿junto a quiénes se sentó Harold?

c) Si Harold está a la derecha de Michael, ¿junto a quiénes está Nico?

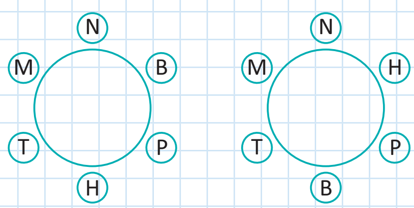
Resolución:

Michael se sentó junto y a la derecha de Nico y frente a Peter, además Tito no se sentó junto a Peter.



Solo faltaría ubicar a Beto y Harold.

a) Existen 2 ordenamientos posibles.



b)Harold se sentó junto a Tito y Peter.

c) Nico está Junto a Michael y Beto.

2 En una mesa circular con 6 asientos distribuidos simétricamente se sientan 5 hermanos: Enrica, Flavia, Tita, Graciela y Lucho.

Se sabe que:

Lucho y Tita no se sientan juntos.

Graciela se sienta junto a Enrica y Lucho.

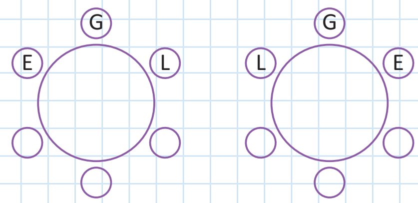
Flavia se sienta frente a Graciela.

¿Quién se sienta frente al sitio vacío?

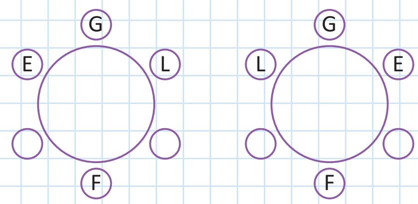
Resolución:

Graciela se sienta junto a Enrica y Lucho. Entonces puede ser que Enrica esté a la derecha de Graciela y Lucho a la izquierda o viceversa.

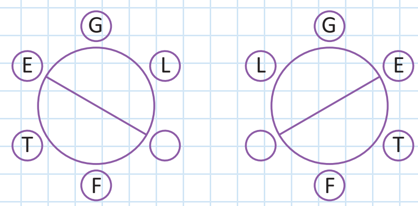
Luego, existen 2 posibilidades.



Flavia se sienta frente a Graciela.



Lucho y Tita no se sientan juntos.



∴ En cualquier caso, Enrica se sienta frente al sitio vacío.

3 Joaquín invita a cenar a sus amigos: Vanessa, Ana, Carlos, Francisco y Anselmo; este último no pudo asistir. Los asistentes se sientan alrededor de una mesa circular con 6 asientos distribuidos simétricamente.

Joaquín se sienta junto a Francisco y Carlos.

Frente a Francisco se sienta Vanessa.

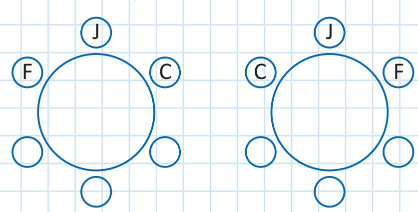
Junto a un hombre no se encuentra el asiento vacío.

¿Entre quiénes se sienta Francisco?

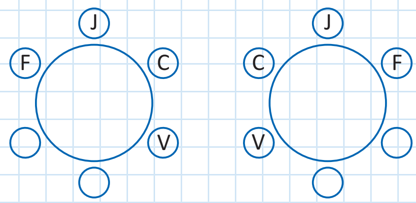
Resolución:

Joaquín se sienta junto a Francisco y Carlos. Entonces, puede ser que Francisco esté a la derecha de Joaquín y Carlos a la izquierda, o viceversa.

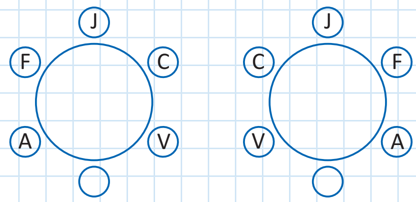
Luego, existen 2 posibilidades.



Frente a Francisco, está Vanessa.



Junto a un hombre no se encuentra el asiento vacío.



∴ Francisco se sienta entre Joaquín y Ana.

4 Un matemático, un físico y un químico comentan que cada uno es hincha de un equipo diferente:

Yo soy hincha de Alianza, le dice el físico a Jeremías.
Toño comenta: yo soy hincha de Cristal.
El químico dice: yo voy al estadio a ver los partidos de la U.
El tercer personaje se llama Axel.
¿Cómo se llama el matemático?

Resolución:

Yo soy hincha de Alianza, dice el físico a Jeremías, entonces Jeremías no es hincha de Alianza ni físico.
Toño es hincha de Cristal, entonces Toño tampoco es físico.
El químico es hincha de la U, entonces Toño tampoco es químico.
Ordenando la información en un cuadro de doble entrada, tenemos:

	PROFESIÓN			EQUIPO		
	Matemático	Físico	Químico	Alianza	Cristal	U
Jeremías	×	×	✓	×	×	✓
Toño	✓	×	×	×	✓	×
Axel	×	✓	×	✓	×	×

∴ El matemático se llama Toño.

5 Andrés, Pablo, Sandro y Denis postularán a las universidades: UNMSM, UNI, UNAC y UNFV, ellos estudiarán Economía, Contabilidad, Ingeniería y Administración.

I. Andrés no desea estudiar en la UNFV, ni en la UNI.
II. El que desea estudiar en la UNMSM estudiará Contabilidad.
III. El que postula a la UNAC no estudia Ingeniería y aquí tiene auge Administración.
IV. Sandro prefiere Economía en lugar de Administración.
V. El que pretende la UNI quiere Ingeniería.
VI. A Pablo le agrada Contabilidad.

¿Qué y dónde estudiará Denis?

Resolución:

De II, el que estudia Contabilidad postula a la UNMSM.

	UNIVERSIDADES				CARRERAS			
	UNMSM	UNI	UNAC	UNFV	Economía	Contabilidad	Ingeniería	Administración
Andrés	×	×		×	×	×		
Pablo	✓	×	×	×	×	✓	×	×
Sandro	×				✓	×	×	×
Denis	×				×	×		

De V, el que postula a la UNI quiere Ingeniería, entonces los que no postulan a la UNI no estudiarán Ingeniería.

	UNIVERSIDADES				CARRERAS			
	UNMSM	UNI	UNAC	UNFV	Economía	Contabilidad	Ingeniería	Administración
Andrés	×	×		×	×	×	×	✓
Pablo	✓	×	×	×	×	✓	×	×
Sandro	×	×			✓	×	×	×
Denis	×	✓	×	x	×	×	✓	×

El que postula a la UNAC estudia Administración. Entonces, el que postula a la UNFV estudia Economía.

	UNIVERSIDADES				CARRERAS			
	UNMSM	UNI	UNAC	UNFV	Economía	Contabilidad	Ingeniería	Administración
Andrés	×	×	✓	×	×	×	×	✓
Pablo	✓	×	×	×	×	✓	×	×
Sandro	×	×	×	✓	✓	×	×	×
Denis	×	✓	×	x	×	×	✓	×

∴ Denis estudiará en la UNI Ingeniería.

8 El día domingo salen del aeropuerto 5 aviones de pasajeros en el siguiente horario: 5:00 am, 7:00 am, 10:00 am, 2:00 pm y 8:00 pm. Se dirigen a Holanda, Canadá, Cuba, Italia y Uruguay. Los aviones son: Auténtic, Gracia, Rápido, Súper y Tornado. Se sabe que:

I. El avión que se dirige a Canadá sale a las 10:00 am.
II. El Auténtic se dirige a Holanda.
III. El que se dirige a Italia parte a las 2:00 pm.
IV. El Súper partió a las 7:00 am.
V. El Gracia siempre sale a las 10:00 am.

¿A qué país se dirigió el avión Tornado? y ¿a qué hora?

Resolución:

Colocando los datos en un cuadro:

	HORARIO					PAISES				
	5:00 a.m.	7:00 a.m.	10:00 a.m.	2:00 p.m.	8:00 p.m.	Holanda	Canadá	Cuba	Italia	Uruguay
Auténtic	×	×	×			✓	×	×	×	×
Gracia	×	×	✓	×	×	×				×
Rápido	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
Súper	×	✓	×	×	×	×				×
Tornado	×	×	×			×				×

De I, el avión que sale a las 10:00 am sale a Canadá.

	HORARIO					PAISES				
	5:00 a.m.	7:00 a.m.	10:00 a.m.	2:00 p.m.	8:00 p.m.	Holanda	Canadá	Cuba	Italia	Uruguay
Autentic	×	×	×			✓	×	×	×	×
Gracia	×	×	✓	×	×	×	✓	×	×	×
Rápido	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
Súper	×	✓	×	×	×	×	×			×
Tornado	×	×	×			×	×			×

De III, el que se dirige a Italia parte a las 2:00 pm.

	HORARIO					PAISES				
	5:00 a.m.	7:00 a.m.	10:00 a.m.	2:00 p.m.	8:00 p.m.	Holanda	Canadá	Cuba	Italia	Uruguay
Autentic	×	×	×	×	✓	✓	×	×	×	×
Gracia	×	×	✓	×	×	×	✓	×	×	×
Rápido	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
Súper	×	✓	×	×	×	×	×	✓	×	×
Tornado	×	×	×	✓	×	×	×	×	✓	×

∴ A Italia a las 2:00 pm.

9 En lo más profundo del Caribe, 5 piratas enterraron sus tesoros en una misma isla. Se quiere saber en qué playa desembarcó cada pirata, dónde enterró su tesoro y en qué consistía este. Se sabe que:

I. Ningún pirata enterró el tesoro en la misma playa en que desembarcó.
II. El Capitán Bandido enterró monedas de oro, pero no lo hizo en el centro de la isla.
III. Quien desembarcó en la playa este (no fue el Capitán Muerte) llevó tejidos de seda.
IV. Quien desembarcó en la playa sudoeste enterró el tesoro en la playa oeste.
V. El Capitán Negro desembarcó en la playa oeste. No llevaba vasijas.
VI. En la playa sur se desembarcaron diamantes que no se enterraron en la playa norte.
VII. El Capitán Loco desembarcó en la playa norte, pero no enterró su tesoro en el centro de la isla.
VIII. Las perlas se enterraron en la playa este.

Los datos son:

Piratas: Bandido, Maldito, Muerte, Loco, Negro.

Desembarco: este, norte, oeste, sudoeste, sur.

Tesoro: diamantes, monedas, perlas, tejidos, vasijas.

Entierro: centro, este, norte, oeste, sur.

¿Dónde enterró su tesoro el Capitán Muerte?

Resolución:

Según los datos:

	DESEMBARCO					TESORO					ENTIERRO				
	Este	Norte	Oeste	Sudoeste	Sur	Diamantes	Monedas	Perlas	Tejidos	Vasijas	Centro	Este	Norte	Oeste	Sur
Bandido		×	×			×	✓	×	×	×	×				
Maldito		×	×				×								
Muerte	×	×	×				×								
Loco	×	✓	×	×	×		×				×				
Negro	×	×	✓	×	×		×			×					
III	✓								✓						
IV				✓										✓	
VI					✓	✓							×		
VIII								✓				✓			

De (III), el que desembarcó en la playa este llevó tejidos, entonces el que no desembarca no lleva tejidos.

	DESEMBARCO					TESORO					ENTIERRO				
	Este	Norte	Oeste	Sudoeste	Sur	Diamantes	Monedas	Perlas	Tejidos	Vasijas	Centro	Este	Norte	Oeste	Sur
Bandido	×	×	×			×	✓	×	×	×	×				
Maldito	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×					
Muerte	×	×	×				×		×						
Loco	×	✓	×	×	×		×		×		×				
Negro	×	×	✓	×	×		×		×	×					
IV				✓										✓	
VI					✓	✓							×		
VIII								✓				✓			

De (VI), en la playa sur se desembarcó diamantes, entonces los que no desembarcaron en esta playa no llevaban diamantes.

	DESEMBARCO					TESORO					ENTIERRO				
	Este	Norte	Oeste	Sudoeste	Sur	Diamantes	Monedas	Perlas	Tejidos	Vasijas	Centro	Este	Norte	Oeste	Sur
Bandido	×	×	×	✓	×	×	✓	×	×	×	×				
Maldito	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×					
Muerte	×	×	×	×	✓	✓	×	×	×	×			×		
Loco	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×				
Negro	×	×	✓	×	×	×	×	✓	×	×					
IV				✓										✓	
VIII								✓				✓			

De (VIII), las perlas se enterraron en la playa este.

	DESEMBARCO					TESORO					ENTIERRO				
	Este	Norte	Oeste	Sudoeste	Sur	Diamantes	Monedas	Perlas	Tejidos	Vasijas	Centro	Este	Norte	Oeste	Sur
Bandido	×	×	×	✓	×	×	✓	×	×	×	×	×			
Maldito	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×		×			
Muerte	×	×	×	×	✓	✓	×	×	×	×		×	×		
Loco	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	×			
Negro	×	×	✓	×	×	×	×	✓	×	×	×	✓	×	×	×
IV				✓										✓	

De (IV), el que desembarcó en la playa sudoeste enterró el tesoro en la playa oeste.

	DESEMBARCO					TESORO					ENTIERRO				
	Este	Norte	Oeste	Sudoeste	Sur	Diamantes	Monedas	Perlas	Tejidos	Vasijas	Centro	Este	Norte	Oeste	Sur
Bandido	×	×	×	✓	×	×	✓	×	×	×	×	×	×	✓	×
Maldito	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×		×		×	
Muerte	×	×	×	×	✓	✓	×	×	×	×		×	×	×	
Loco	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	×		×	
Negro	×	×	✓	×	×	×	×	✓	×	×	×	✓	×	×	×

También se sabe que ningún pirata enterró el tesoro en la misma playa que desembarcó, entonces el Pirata Loco no enterró el tesoro en la playa norte.

	DESEMBARCO					TESORO					ENTIERRO				
	Este	Norte	Oeste	Sudoeste	Sur	Diamantes	Monedas	Perlas	Tejidos	Vasijas	Centro	Este	Norte	Oeste	Sur
Bandido	×	×	×	✓	×	×	✓	×	×	×	×	×	×	✓	×
Maldito	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	×	×	✓	×	×
Muerte	×	×	×	×	✓	✓	×	×	×	×	✓	×	×	×	×
Loco	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	×	×	×	✓
Negro	×	×	✓	×	×	×	×	✓	×	×	×	✓	×	×	×

∴ El Capitán Muerte enterró su tesoro en la playa centro.

Actividades de razonamiento

1. Un edificio tiene 6 pisos; las empresas: Alfa, Beta, Teta, Gamma, Delta y Omega ocupan cada una un piso.
   - Teta y Alfa están en pisos adyacentes.
   - Gamma vive dos pisos más arriba que Beta y esta última, dos pisos más arriba que Alfa.
   - Omega está en el quinto piso.

   De las afirmaciones:
   I. Teta puede estar en el primer a tercer piso.
   II. Gamma no está en el sexto piso.
   III. Omega vive más arriba que Delta.
   Son siempre ciertas:

   A) I y II   B) I y III   C) II y III   D) Solo I   E) Todas

2. Tres amigos: Fernando, Julio y Luis tienen cada uno un animal diferente. Se sabe que:
   - Fernando le dice al dueño del gato que el otro amigo tiene un canario.
   - Julio le dice al dueño del gato que su mascota y el perro pelean siempre.

   ¿Qué animal tiene Julio y quién es el dueño del perro?

   A) Canario - Julio   B) Perro - Fernando
   C) Gato - Luis   D) Canario - Fernando
   E) Perro - Luis

3. Tres primos: Joel, Pepe y Rolando se encuentran y comentan sobre los colores de sus carros. Solo hay 3 colores: anaranjado, azul y violeta, y no hay 2 carros con el mismo color. Joel dice: mi carro no es azul ni anaranjado. Rolando dice: me hubiera gustado que sea de color azul. ¿De qué color es el carro de Pepe?

   A) Rojo   B) Anaranjado   C) Azul
   D) Rosado   E) Violeta

4. Tres parejas de esposos están sentados en una mesa redonda y ningún hombre está sentado junto a otro, pero sí junto a su pareja.
   Si además:
   - Ana no está sentada junto a Pedro, ni Alberto junto a Rosa.
   - María está sentada junto y a la derecha de Pedro.

   ¿Quiénes están sentados al costado de Carlos?

   A) María y Rosa   B) Ana y Rosa   C) Ana y Carlos
   D) María y Ana   E) Rosa y Pedro

5. Cuatro amigos se sientan alrededor de una mesa redonda con 4 sillas distribuidas simétricamente. Si sabemos que:
   - Juan se sienta junto y a la derecha de Luis.
   - Pedro no se sienta junto a Luis.
   - José les comentó lo entretenido que está.

   Podemos afirmar que:

   A) José y Juan se sientan juntos.
   B) Luis y José no se sientan juntos.
   C) No es cierto que José y Juan no se sientan juntos.
   D) Pedro se sienta junto y a la derecha de José.
   E) Juan se sienta junto y a la izquierda de Pedro.

6. Tres primos estudian en cada una de las siguientes universidades: San Marcos, Villarreal y UNI, carreras diferentes: Ingeniería industrial, Ingeniería mecánica y Economía. Julio no estudia en San Marcos, Daniel no está en la Villarreal, el que está en San Marcos no estudia Ing. industrial, el que está en Villarreal estudia Ingeniería mecánica. Daniel no estudia Economía, se quiere saber qué estudia Ricardo y dónde estudia.

   A) Economía-San Marcos   B) Economía-UNI
   C) Economía-Villarreal   D) Ing. mecánica-San Marcos
   E) Ing. mecánica-Villarreal

7. Sabemos que las profesionales Andrea, Carmen, Karola y Sabrina son arqueóloga, abogada, odontóloga y profesora, no necesariamente en este orden. ¿Quién es la abogada y quién es la profesora?, si:

- Andrea está casada con el hermano de la abogada.
- Carmen y la profesora van a trabajar en la movilidad de la abogada.
- Las solteras Karola y la arqueóloga son hijas únicas.
- Carmen y Sabrina son amigas de la odontóloga, quien está de novia.

A) Sabrina-Karola B) Andrea-Carmen
C) Sabrina-Carmen D) Karola-Sabrina
E) Sabrina-Andrea

8. Tres estudiantes de Geografía, Arte e Ingeniería viven en Cajamarca, Loreto y Apurímac (no en ese orden necesariamente).

- El primero no vive en Loreto, ni estudia ingeniería.
- El segundo no vive en Cajamarca y estudia Arte.
- El Geógrafo vive en Apurímac.

¿Qué estudia el tercero y dónde vive?

A) Ingeniería-Loreto B) Geografía-Apurímac
C) Geografía-Loreto D) Ingeniería-Cajamarca
E) Faltan datos

9. Cuatro amigos: Carla, Antonio, Mario y Rosa se sientan alrededor de una mesa, en la que hay cuatro sillas distribuidas simétricamente sabemos que:

- Carla se sienta junto y a la derecha de Antonio.
- Mario no se sienta junto a Antonio.
- Rosa está entretenida observando cómo los otros tres conversan.

Según esto, podemos afirmar que:

A) Rosa y Carla se sientan juntas.
B) Antonio y Rosa no se sientan juntos.
C) No es cierto que Rosa y Carla no se sientan juntas.
D) Mario se sienta junto y a la derecha de Rosa.
E) Mario se sienta junto y a la derecha de Carla.

10. Tres amigos Alberto, Bruno y Carlos viven en un distrito diferente y se movilizan en un transporte distinto. Los distritos son: La Molina, Lince y Breña, los medios usados son: bicicletas, moto y ómnibus.

- Cuando Bruno tenga dinero se comprará una moto y se mudará a Breña.
- Desde que Carlos vive en Lince ya no tiene bicicleta.
- El que vive en la Molina usa dos ómnibus debido a la distancia.

¿Cómo se moviliza el que vive en Breña?

A) Moto B) Bicicleta C) Ómnibus
D) Automóvil E) Faltan datos

11. En un restaurante, 5 personas se sientan alrededor de una mesa circular de 5 sillas y piden una gaseosa para cada uno; 3 Concordia y 2 Pepsi Cola. Si se sabe que:

- Los que piden Pepsi no se sientan juntos.
- Betty no se sienta junto a Olga, pero ambas piden Concordia.
- Óscar no pide Pepsi Cola y se sienta junto a Betty, pero no junto a Manuel.
- Mientras los otros conversaban César terminaba su gaseosa.

Podemos afirmar que:

A) Óscar se sienta junto a Olga.
B) No es cierto que Olga no se sienta junto a Manuel.
C) No es cierto que Betty no se sienta junto a César.
D) No es ciento que Manuel se sienta junto a Betty.
E) Más de una es correcta.

12. Cuatro jóvenes: Ramiro, Robert, Rigoberto y Renato estudian una profesión diferente entre Ingeniería de sistemas, Contabilidad, Historia y Filosofía en diferentes universidades: UNSA, San Pablo, Alas Peruanas y UCSM, no necesariamente en ese orden y se sabe que:

- Rigoberto es amigo del filósofo y del que estudia en la San Pablo.
- La carrera de Historia se ofrece en la UNSA.
- Renato estudia en las Alas Peruanas donde no se enseña filosofía.
- Ramiro no conoce la San Pablo.
- Robert no estudia Filosofía ni Ing. de sistemas.

¿Quién estudia Filosofía y qué estudia Renato?

A) Robert-Filosofía B) Renato-Contabilidad C) Ramiro-Historia
D) Ramiro-Ing. sistemas E) Ramiro-Contabilidad

13. A un evento asistieron tres parejas de esposos y de ellos se tiene la siguiente información:

- Hay dos venezolanos, dos argentinos y dos chilenos.
- No hay dos hombres de la misma nacionalidad.
- No hay una pareja de esposos de la misma nacionalidad.
- Alberto es argentino y la esposa de Miguel es chilena.
- El tercer varón es Julio.

¿Qué nacionalidad tiene Miguel y la esposa de Julio, respectivamente?

A) Venezolano-Chilena B) Chileno-Venezolana C) Venezolano-Argentina
D) Argentino-Chilena E) Chileno-Argentina

14. Cuatro amigos cada uno con una determinada afición a un juego: sapo, ajedrez, dominó y ludo, tienen una mascota: pato, gallo, perro y gato; y afición a un deporte: tenis, básquet, fútbol y vóley.

- Pedro es aficionado del tenis.
- Álex juega dominó.
- El que juega sapo tiene el pato.
- El aficionado al básquet tiene el perro.
- Luis no tiene el gato.
- Jaime no juega ajedrez.
- El aficionado al fútbol juega ajedrez.
- El que juega ludo es aficionado del vóley.

El dueño del gallo es:

A) Pedro B) Álex C) Faltan datos
D) Luis E) Jaime

Claves

1. B 5. E 9. E 13. C
2. D 6. A 10. B 14. D
3. C 7. E 11. B
4. B 8. D 12. D

Reto



En una mesa circular hay seis asientos simétricamente colocadas, ante la cual se sientan seis amigos para almorzar.
Si Luis no está sentado al lado de César ni de Raúl; Pancho no está al lado de César ni de Mario, Antonio está junto y a la derecha de Pancho, ¿quién está junto y a la derecha de Mario?

Rpta.: César o Luis

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Sabiendo que entre cinco amigos, Antonio es mayor que Benito, Carla es menor que Diana, Eduardo es menor que Carla y Benito es mayor que Diana. Entonces podemos afirmar que:

   A) Benito es el menor.
   B) Diana es la menor.
   C) Eduardo es el menor.
   D) Diana es menor que Carla.
   E) Benito es menor que Carla.

2. Cinco compañeros están reunidos y se observa lo siguiente:
   - Nora es más alta que Kori.
   - Rosa es más alta que Nora pero más baja que Pepe.
   - Pepe es más bajo que Maicol.

   ¿Quién es más alto?

   A) Pepe B) Rosa C) Maicol
   D) Kori E) Nora

3. Se sabe que cuatro amigas viven en una misma calle y en la misma acera, además:
   - Anita no vive al lado de Betty.
   - Carmen no vive al lado de Diana.
   - Diana no vive al lado de Anita.

   ¿Quiénes viven al centro de los que tienen su casa en los extremos de la calle?

   A) Betty y Carmen B) Anita y Carmen
   C) Betty y Diana D) Anita y Betty
   E) Carmen y Diana

4. De un grupo de jóvenes, sabemos que:
   - Ana y Carlos son mellizos.
   - Betty es mayor que Carlos.
   - Fernando es mayor que Betty y menor que Elsa.
   - David y Carlos tienen la misma edad.

   ¿Cuál de ellos es el mayor?

   A) Carlos B) David C) Elsa
   D) Fernando E) Ana

5. En una carrera compiten cinco caballos, sabiendo que:
   - Bonito llegó antes que Pituco.
   - Súper llegó antes que Tímido.
   - Bonito llegó después que Malulo.
   - Súper llegó después que Pituco.

   ¿Quién ganó la carrera?

   A) Bonito B) Pituco C) Tímido
   D) Malulo E) Súper

6. En un edificio trabajan 4 señores, uno en cada piso. Sabemos que:
   - El Sr. Vásquez trabaja más arriba que el Sr. Pérez.
   - El Sr. Pérez trabaja entre el piso del Sr. Vásquez y el piso del Sr. Navarro.
   - El Sr. Flores trabaja más abajo que el Sr. Navarro.

   ¿Quién trabaja en el primer piso?

   A) Faltan datos B) Sr. Flores
   C) Sr. Navarro D) Sr. Vásquez
   E) Sr. Pérez

7. Cinco amigos hablan sobre cuánto dinero tienen:
   - Antonio tiene 2 soles menos que Bernardo.
   - Daniel tiene 2 soles menos que Eduardo.
   - Carlos tiene 1 sol menos que Antonio.
   - Bernardo tiene 1 sol menos que Eduardo.

   ¿Quién es el que menos dinero tiene?

   A) Faltan datos B) Carlos C) Antonio
   D) Bernardo E) Daniel

8. Se reúnen los seis integrantes de un directorio, alrededor de una mesa circular, con asientos distribuidos simétricamente. Se sabe que:
   - El Sr. Segura se sentó frente al Sr. Benavides y está conversando con el Sr. Otero.
   - El Sr. Ramos no se sentó frente al Sr. Jáuregui ni al Sr. Valle.
   - El Sr. Jáuregui se sentó junto y a la derecha del Sr. Segura.

   Indica cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s):
   I. El Sr. Ramos se sienta frente al Sr. Otero.
   II. El Sr. Valle se sienta junto al Sr. Benavides.
   III. El Sr. Benavides se sienta junto al Sr. Ramos y al Sr. Valle.

   A) Solo I B) Solo II C) I y III
   D) I y II E) Todas

9. Del enunciado anterior:
   Si el Sr. Benavides se sienta a la derecha del Sr. Otero, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?
   I. El Sr. Valle se sienta junto a los Sres. Benavides y Segura.
   II. El Sr. Ramos se sienta junto a los Sres. Segura y Jáuregui.
   III. El Sr. Segura se sienta junto al Sr. Valle y Sr. Ramos.

   A) I y II B) II y III C) Solo I
   D) Solo III E) Todas

10. De acuerdo al enunciado del problema 8: ¿cuál (es) de las siguientes afirmaciones, no pueden ser posibles?
    I. El Sr. Benavides se sienta junto al Sr. Ramos.
    II. El Sr. Valle se sienta junto al Sr. Otero.
    III. El Sr. Jáuregui se sienta junto al Sr. Valle.

    A) Solo III B) Solo I C) I y III
    D) I y II E) Solo II

NIVEL 2

11. Cuatro amigos, Gabriel, Pablo, Ricardo y Fabián, tienen diferente ocupación y domicilio. Uno de ellos vive en San Isidro, Fabián vive en Miraflores, el doctor vive en Barranco, Ricardo no vive en San Isidro ni en Barranco. El chef reside en el extranjero. El odontólogo es primo del arquitecto. Pablo es odontólogo. Indica la alternativa correcta.

    A) Gabriel - odontólogo - San Isidro
    B) Pablo - doctor - Barranco
    C) Ricardo - chef - extranjero
    D) Fabián - arquitecto - Barranco
    E) Fabián - odontólogo - Miraflores

12. Un programa musical de TV, se transmite en vivo dos veces por semana; sábado y domingo; en él trabajan 4 bailarinas que se han especializado en 2 ritmos cada una. Cada ritmo lo baila solo una bailarina por programa y cada bailarina solo baila un ritmo por semana. Cecilia baila rock y salsa, Paty baila cumbia y salsa, Nuria baila rock y merengue, Silvia baila cumbia y merengue.
Si Cecilia baila rock el sábado, ¿qué baila Silvia ese día?

A) Rock B) Salsa C) Cumbia
D) Merengue E) Faltan datos

13. Del problema anterior, si el domingo Paty baila cumbia, ¿que baila Nuria ese día?

A) Rock B) Salsa C) Cumbia
D) Merengue E) Faltan datos

14. Del problema 12, cuando Nuria baila merengue los sábados, ¿quién baila salsa el domingo?

A) Cecilia B) Paty C) Nuria
D) Silvia E) Faltan datos

15. Del problema 12, si Cecilia no baila rock el domingo, ¿qué baila Paty el sábado?

A) Rock B) Salsa C) Cumbia
D) Merengue E) Faltan datos

16. Un equipo de fútbol tiene 6 jugadores: Fausto, Rubén, Jorge, Manuel, Paco y Renato, que pueden jugar en puestos diferentes. Fausto puede jugar de arquero, delantero izquierdo o central; Rubén puede jugar de central o delantero derecho; Jorge puede jugar de defensa derecho o central, Manuel puede jugar de defensa izquierdo o delantero derecho; Paco puede jugar de defensa izquierdo o delantero izquierdo; Renato puede jugar de arquero, delantero izquierdo o defensa derecho.
Si en un partido, Fausto no está jugando de arquero, ¿quién está jugando en ese puesto?

A) Manuel B) Fausto C) Renato
D) Rubén E) Paco

17. De acuerdo al enunciado del problema 16, si en un partido, Fausto está jugando de delantero izquierdo, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones debe(n) ser verdadera(s)?

I. Rubén juega de central.
II. Jorge juega de defensa derecho.
III. Manuel juega de defensa izquierdo.

A) Todas B) Solo I C) I y III
D) Solo II E) I y II

18. De acuerdo al enunciado del problema 16, si en un partido, Rubén está jugando de delantero derecho, entonces no puede ser:

I. Fausto está jugando de arquero.
II. Paco está jugando de defensa izquierdo.
III. Renato está jugando de defensa derecho.

A) Ninguna B) I y II C) I y III
D) Solo II E) Todas

19. Del problema 16: si Renato está jugando de delantero izquierdo, ¿qué afirmación es verdadera?
   I. Fausto está jugando de central.
   II. Jorge está jugando de defensa derecho.
   III. Paco está jugando de defensa izquierdo.

   A) Solo I B) Solo III C) Solo II
   D) II y III E) I y III

NIVEL 3

20. Raúl, Martín, Liliana y Bessy tienen diferentes ocupaciones: arquitecto, psicólogo, médico y agrónomo. Van de vacaciones a diferentes lugares: Huaraz, Chiclayo, Cusco e Iquitos. Raúl trajo un frailecillo a su regreso; Martín admiró la belleza del Lanzón de Chavín, Bessy es médico; Liliana cumplió su deseo de conocer Macchu Picchu y le gustaría estudiar profesionalmente el diseño de estas construcciones; el agrónomo no conoció Chiclayo. El agrónomo visitó Huaraz. ¿Quién visitó Chiclayo y cuál es la profesión de Liliana?

   A) Liliana - arquitecto B) Martín - arquitecto
   C) Bessy - médico D) Bessy - psicólogo
   E) Raúl - médico

21. Una señora va a inaugurar una cadena de hoteles en ciertas ciudades de Latinoamérica: Cusco, La Paz, Brasilia, Montevideo, Buenos Aires, Caracas y Cali, bajo las siguientes condiciones:
   - Inaugura Cusco inmediatamente después de La Paz.
   - Después de inaugurar cuatro hoteles consecutivos inaugura el hotel en Brasilia.
   - El tercer hotel inaugurado fue el de Cali.

   Si el primero se inauguró en Montevideo, ¿cuál puede ser un orden correcto de inauguración?

   A) Buenos Aires, Cali, Brasilia, La Paz, Cusco, Caracas, Montevideo.
   B) Montevideo, Caracas, Cali, Buenos Aires, Brasilia, La Paz, Cusco.
   C) La Paz, Brasilia, Cusco, Caracas, Buenos Aires, Cali, Montevideo.
   D) Buenos Aires, Caracas, Cali, Brasilia, La Paz, Cusco, Montevideo.
   E) La Paz, Buenos Aires, Caracas, Cusco, Cali, Brasilia, Montevideo.

22. De acuerdo al enunciado del problema 21, si la segunda ciudad fue Cusco y la última Montevideo, ¿qué ciudad puede inaugurar entre Cali y Brasilia?

   A) La Paz B) Cusco
   C) Cali D) Caracas o Buenos Aires
   E) Caracas o Montevideo

23. De acuerdo al enunciado del problema 21, si la primera ciudad es Caracas y la cuarta es Buenos Aires, ¿qué ciudad inauguró en sexto lugar?

   A) La Paz B) Cali C) Cusco
   D) Brasilia E) Montevideo

24. Tres amigas tienen diferentes edades: 16; 24 y 30 años. Sus ocupaciones son diferentes: pedicurista, anfitriona y consultora de belleza. Además, viven en 3 distritos distintos: Breña, Lince y Magdalena. Se sabe que:
   - Ángela es anfitriona desde los 16 años.
   - La menor vive en Lince y no es consultora.
   - Zulema es la mayor y vive en Magdalena.
   - Laura vivió antes en Magdalena.

   ¿Quién es la menor?

   A) Laura B) Zulema C) Ángela
   D) Iris E) Faltan datos

25. De acuerdo al enunciado del problema 24, ¿quién vive en Breña?

A) Ángela B) Laura C) Zulema
D) Carmen E) Faltan datos

26. De acuerdo al enunciado del problema 24, ¿cuál es la ocupación de Laura?

A) Anfitriona B) Consultora de belleza
C) Enfermera D) Pedicurista
E) Faltan datos

27. De acuerdo al enunciado del problema 24, ¿cuál es la edad de Laura?

A) 16 años B) 24 años C) 30 años
D) 36 años E) Faltan datos

28. Cuatro jóvenes: César, Félix, Javier y Roberto, estudian carreras diferentes: Educación, Derecho, Sociología y Química en diferentes universidades: PUCP, UNMSM, UNFV Y UNAC.
Además:

- Javier es vecino del que estudia Química y del que estudia en la UNMSM.
- La carrera de Sociología solo se estudia en la PUCP.
- Roberto estudia en la UNAC, donde no enseñan Química.
- César no sabe dónde está ubicada la UNMSM.
- Félix no estudia Química ni Educación.

¿Dónde y qué estudia Félix?

A) UNMSM - Derecho B) PUCP - Sociología
C) UNMSM - Sociología D) UNAC - Derecho
E) UNFV - Derecho

29. Ángel, Miguel y César tienen diferentes aficiones y gustos en deportes: fútbol, básquet y tenis; literatura: novela, poesía, drama; licores: vino, pisco y cerveza; y colecciones: monedas, cerámicas y libros.
Se sabe que:

- A Miguel no le agrada el fútbol.
- Al que le agrada el tenis, gusta del pisco.
- El que colecciona cerámicas lee dramas.
- El que gusta del fútbol, toma cerveza.
- Ángel disfruta cuando juega tenis o lee poesía.
- César colecciona libros.

Indica los gustos y aficiones de César.

A) Básquet, poesía, pisco, libros.
B) Fútbol, novela, cerveza, monedas.
C) Tenis, drama, vino, cerámicas.
D) Fútbol, novela, cerveza, libros.
E) Básquet, drama, cerveza, monedas.

Claves

NIVEL 1			
1. C	9. B	17. E	25. A
2. C	10. A	18. D	26. D
3. A	NIVEL 2	19. D	27. A
4. C	11. C	NIVEL 3	28. A
5. D	12. C	20. D	29. D
6. B	13. A	21. B	
7. B	14. A	22. D	
8. E	15. B	23. A	
	16. C	24. A	

UNIDAD 3



La serie de Fibonacci en las semillas de un girasol

Los girasoles son hermosas flores reconocidas por la forma en que sus cabezas amarillas se ven contra el cielo azul. Y por supuesto, a muchos también les gusta masticar sus semillas. Sin embargo, ¿te has detenido a observar el patrón de las semillas al centro de estas flores?

Los girasoles son, además de una bella imagen o un rico bocadillo, una maravilla matemática. El patrón de las semillas dentro del girasol sigue la sucesión de Fibonacci: 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144;… Cada número de la secuencia es la suma de los dos números anteriores.

En los girasoles, las espirales que se ven en el centro se generan a partir de esta secuencia: "Hay dos series de curvas sinuosas en direcciones opuestas, comenzando en el centro y extendiéndose hacia los pétalos, con cada semilla en un ángulo particular de la vecina para así crear el espiral".

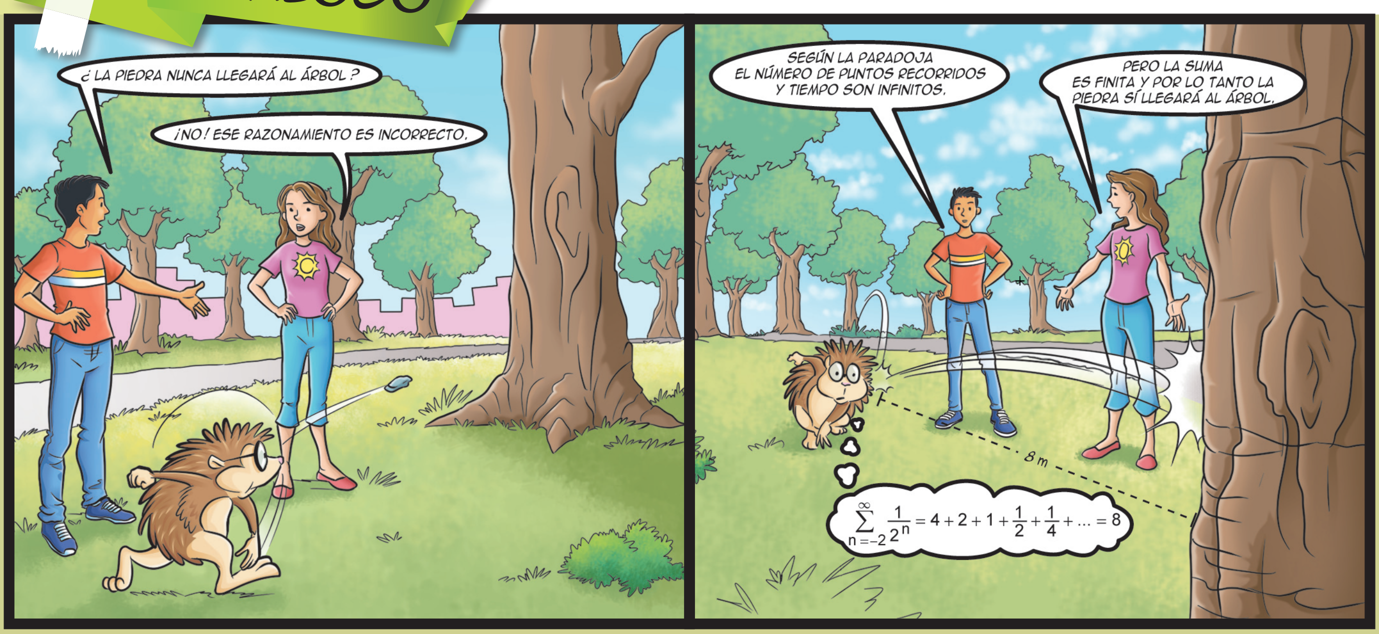
Matemática recreativa

Paradoja de la dicotomía

Esta paradoja es conocida como argumento o paradoja de la dicotomía. Zenón está a ocho metros de un árbol. Llegado un momento, lanza una piedra, tratando de dar al árbol. La piedra, para llegar al objetivo, tiene que recorrer antes la primera mitad de la distancia que lo separa de el, es decir, los primeros cuatro metros, y tardará un tiempo (finito) en hacerlo. Una vez que llegue a estar a cuatro metros del árbol, deberá recorrer los cuatro metros que le quedan, y para ello debe recorrer primero la mitad de esa distancia. Pero cuando esté a dos metros del árbol, tardará un tiempo en recorrer el primer metro, y luego el primer medio metro restante, y luego el primer cuarto de metro... De este modo, la piedra nunca llegará al árbol.



DIÁLOGO



Sucesiones

Recuerda

Convencionalmente el sentido de giro puede ser:





Observación

En una sucesión alfabética se consideran 27 letras, pero al llegar a la Z, se debe continuar con A y viceversa, así:

...; Y; Z; A; B; ...
o
...; B; A; Z; Y; ...



DEFINICIÓN

Es aquella relación existente entre un conjunto ordenado de elementos (pueden ser números, letras, figuras o una combinación de los anteriores casos) y el lugar que ocupa cada uno de dichos elementos.

Las sucesiones pueden ser:

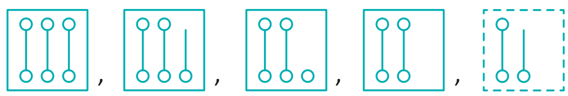
- Sucesiones gráficas.
- Sucesiones literales.
- Sucesiones numéricas.

SUCESIONES GRÁFICAS

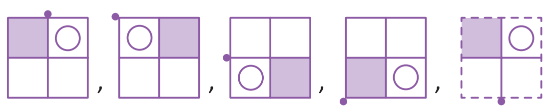
Están conformadas por figuras que han sido construidas y ordenadas de acuerdo a cierto criterio que determina el lugar de cada término de la sucesión.

Ejemplos:

1. ¿Cuál es la figura que continúa?



2. ¿Qué figura continúa en la sucesión gráfica?



SUCESIONES LITERALES

Son aquellas sucesiones que se caracterizan por tener como términos a letras del alfabeto distribuidos de acuerdo a un determinado criterio.

Ejemplos:

1. Indica la letra que continúa.

R; O; M; J; (G)

P N K H
Q Ñ L I

2. ¿Qué letra continúa?

B D

B; A; F; C; J; E; (N)

C G K
D H L
E I M

SUCESIONES NUMÉRICAS

Son aquellas sucesiones cuya característica es presentar como términos a elementos numéricos donde cada uno de ellos tiene un orden designado.

Veamos:

Número ordinal	1.°	2.°	3.°	4.°	...	n.°
	↓	↓	↓	↓		↓
Términos de la Sucesión	t_1	t_2	t_3	t_4		t_n

Ejemplos:

1. La sucesión $t_n = \dfrac{n^3+1}{3n+2}$ tiene como términos:

$$\frac{2}{5}; \frac{9}{8}; \frac{28}{11}; \frac{65}{14}; \ldots$$

2. La sucesión en la cual $t_1 = 16$ y $t_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, t_n$ tiene como términos:

$$16; 8; 4; 2; \ldots$$

Algunas sucesiones numéricas importantes son:

Sucesión aritmética lineal o de primer orden

- El término general de una sucesión de primer orden viene dado por:

$$t_n = t_1 + (n-1)r$$

Donde:

t_1: primer término
r: razón

t_n: término enésimo
n: número de términos

Ejemplo:
Calcula el término enésimo de la siguiente sucesión:

33; 21; 9; −3; −15; ...

(diferencias: −12, −12, −12, −12)

$t_1 = 33 \;\wedge\; r = -12$
$t_n = 33 + (n-1)(-12)$
$t_n = 33 - 12n + 12$
$t_n = 45 - 12n$

- La suma de los n primeros términos se calcula así:

$$S_n = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right)n$$

Ejemplo:
Halla la suma de los 30 primeros términos de la siguiente sucesión:

9; 16; 23; 30; 37; ...

(diferencias: 7, 7, 7, 7)

$t_1 = 9;\; r = 7;\; t_{30} = 9 + (30-1)7 \Rightarrow t_{30} = 212$

$S_{30} = \left(\dfrac{9+212}{2}\right) . 30 \Rightarrow S_{30} = 3315$

Atención

- Número de términos (n)

$$n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1$$

Ejemplo:
Halla el número de términos de la sucesión:
127; 123; 119; ...; −269
(−4, −4)

Veamos:
$r = -4;\; t_1 = 127;\; t_n = -269$

$n = \dfrac{-269 - 127}{-4} + 1$

$\Rightarrow n = 100$



Importante

- Razón (r)

$$r = \frac{t_n - t_1}{n-1}$$

Ejemplo:
Halla la razón si $t_{20} = -195$.

Además:
33; ... ; −195

Veamos:
$t_1 = 33;\; t_{20} = -195$
$n = 20$

$r = \dfrac{-195 - 33}{20 - 1}$

$\therefore r = -12$



Atención

Halla t_n y el trigésimo término.

$-1;\ 3;\ 13;\ 29;\ 51;$

$4\quad 10\quad 16\quad 22$

$6\quad 6\quad 6$

$a = \frac{6}{2} = 3;\ b = 4 - 3 = 1$

$c = -1$

Luego: $t_n = 3n^2 + n - 1$

$t_{30} = 3(30)^2 + 30 - 1$

$= 2729$



Sucesión cuadrática o de segundo orden

El término enésimo viene dado por:

$$t_n = an^2 + bn + c$$

Donde:

t_n: término enésimo

a; b y c: constantes

El cálculo de a, b y c se realiza de la siguiente manera:

$t_0;\quad t_1;\quad t_2;\quad t_3;\quad t_4;\quad t_5;\ \ldots$

$p_0\quad p_1\quad p_2\quad p_3\quad p_4$

$r\quad r\quad r\quad r$

$$a = \frac{r}{2} \qquad b = p_0 - a \qquad c = t_0$$

Ejemplo:

Halla el término enésimo de la siguiente sucesión:

$3\quad -5;\quad -9;\quad -9;\quad -5;\quad 3$

$-8\quad -4\quad 0\quad +4\quad +8$

$+4\quad +4\quad +4\quad +4$

$r = 4;\ p_0 = -8;\ t_0 = 3$

$a = \frac{4}{2} = 2;\ b = -8 - 2 = -10;\ c = 3$

$\therefore t_n = 2n^2 - 10n + 3$

Recuerda

Razón geométrica (q).

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

Suma de “n” primeros términos de una PG.

$$S_n = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Límite de una suma de una PG
$(-1 < q < 1)$

$$S = \frac{t_1}{1 - q}$$



Progresión geométrica

El término general de una progresión geométrica viene dado por:

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

Donde:

t_1: primer término

t_n: término enésimo

q: razón

n: número de términos

Ejemplo:

Halla el término enésimo de la siguiente sucesión:

$108;\quad 36;\quad 12;\quad 4;\quad \frac{4}{3}$

$\times\frac{1}{3}\quad \times\frac{1}{3}\quad \times\frac{1}{3}\quad \times\frac{1}{3}$

$t_1 = 108;\ q = \frac{1}{3}$

$\therefore t_n = 108\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Problemas resueltos

1 En la siguiente sucesión existen 49 términos. ¿Cuántos términos habrá entre los términos 7a y 7b de dicha sucesión?

a; a + 1; a + 2; ... ; b – 1; b

Resolución:

La sucesión completa sería de la siguiente manera:

$$\underbrace{a;\ a+1;\ a+2;\ \ldots;\ a+24;}_{25\text{ términos}}\ \underbrace{b-23;\ \ldots;\ b-1;\ b}_{24\text{ términos}}$$

Se observa claramente que la razón de la sucesión es 1.

Luego: $b - 23 - (a + 24) = 1$

$b - 23 - a - 24 = 1$

$b - a = 48$

Piden la cantidad de términos que existen entre 7a y 7b, lo cual sería:

n.° términos = $7b - 7a + 1 -$ extremos

$= 7(b - a) + 1 - 2$

$= 7 \times 48 - 1$

$= 336 - 1$

∴ n.° términos = 335

2 En la siguiente sucesión:

9; 14; 19; 24; ...

¿Cuántos de sus términos tienen 3 cifras?

Resolución:

Calculamos el término enésimo de la sucesión:

9; 14; 19; 24

+5 +5 +5

$t_n = t_1 + (n - 1)r$

$t_n = 9 + (n - 1)5$

$t_n = 9 + 5n - 5$

$t_n = 5n + 4$

Piden los t_n de 3 cifras:

$100 \leq t_n \leq 999$

$100 \leq 5n + 4 \leq 999$

$96 \leq 5n \leq 995$

$19{,}2 \leq n \leq 199$

Entonces $n \in \{20; 21; ...; 199\}$

∴ n.° términos de 3 cifras = 199 – 20 + 1 = 180

3 Las edades de 4 hermanos están en progresión aritmética y suman 54. Si la edad del mayor duplica a la del menor, ¿cuál es la edad del tercero?

Resolución:

Sean:

x, x + r, x + 2r, x + 3r las edades.

Dato: $x + x + r + x + 2r + x + 3r = 54$

$4x + 6r = 54$

$2x + 3r = 27$ ... (I)

Dato: mayor = 2 menor

$x + 3r = 2x$

$3r = x$ ... (II)

Reemplazamos (II) en (I):

$2x + x = 27$

$3x = 27 \Rightarrow x = 9 \wedge r = 3$

∴ Edad del tercero = $x + 2r = 9 + 2(3) = 15$

4 Dadas las siguientes sucesiones:

5; 8; 11; 14; ...

166; 162; 158; 154; ...

¿Cuál será el término común a ambas sabiendo que ocupan el mismo lugar?

Resolución:

Hallamos el término k-ésimo de las sucesiones.

- 5; 8; 11; 14; ...

  +3 +3 +3

  $a_k = a_1 + (k - 1)r$

  $a_k = 5 + (k - 1)3$

  $a_k = 5 + 3k - 3$

  $a_k = 3k + 2$

- 166; 162; 158; 154; ...

  –4 –4 –4

  $b_k = b_1 + (k - 1)r$

  $b_k = 166 + (k - 1)(-4)$

  $b_k = 166 - 4k + 4$

  $b_k = 170 - 4k$

  Según el enunciado: $a_k = b_k$

  $3k + 2 = 170 - 4k$

  $7k = 168$

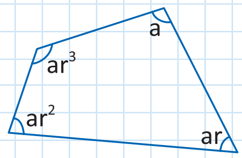
  $\Rightarrow k = 24$

∴ Término común = $a_{24} = 3(24) + 2 = 74$

5 Los ángulos de un cuadrilátero forman una progresión geométrica y el último es 9 veces el segundo. Calcula el menor ángulo.

Resolución:

Veamos gráficamente:



Dato: último = 9 (segundo)

$ar^3 = 9ar$

$r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

La suma de ángulos internos es 360°:

$a + ar + ar^2 + ar^3 = 360°$

$a + 3a + 9a + 27a = 360°$

$40a = 360° \Rightarrow a = 9°$

$\therefore$ Menor ángulo es 9°.

6 Calcula el tercer término de 3 cifras en la siguiente sucesión: 3; 6; 11; 18; ...

Resolución:

$t_0 \rightarrow 2;\ 3;\ 6;\ 11;\ 18$

$p_0 \rightarrow 1\quad 3\quad 5\quad 7$

$r \rightarrow +2\quad +2\quad +2$

Se trata de una sucesión cuadrática de razón igual a 2.

$t_0 = 2,\ p_0 = 1$

Hallando a; b y c:

$a = \frac{r}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow a = 1$

$b = p_0 - a = 1 - 1 \Rightarrow b = 0$

$c = t_0 \Rightarrow c = 2$

$t_n = an^2 + bn + c \Rightarrow t_n = n^2 + 2$

Piden el tercer término de 3 cifras.

$t_n \geq 100 \Rightarrow n^2 + 2 \geq 100 \Rightarrow n \geq 9,...$

$n = 10 \Rightarrow t_{10} = 102$

$n = 11 \Rightarrow t_{11} = 123$

$n = 12 \Rightarrow t_{12} = 146$

$\therefore$ Tercer término es 146.

7 Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética, si se les añade 1, 4 y 43 respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica. ¿Cuáles son los números iniciales?

Resolución:

Sea: $a - r,\ a,\ a + r$, la PA cuya suma es 36.

$a - r + a + a + r = 36$

$3a = 36 \Rightarrow a = 12$

La PA será: $12 - r,\ 12,\ 12 + r$.

Luego se añade al primer, segundo y tercer término: 1; 4 y 43, respectivamente.

$13 - r,\ 16,\ 55 + r$

Como el cociente de dos términos consecutivos en una progresión geométrica es constante se tiene:

$\frac{16}{13 - r} = \frac{55 + r}{16} \Rightarrow r^2 + 42r - 459 = 0$

$r \qquad +51$

$r \qquad -9 \Rightarrow r = 9$

Finalmente los números serán:

$12 - 9,\ 12,\ 12 + 9 \Rightarrow 3;\ 12;\ 21$

8 Dadas las sucesiones:

$a,\ a + b,\ a + 4b, ...$ y $a - 1,\ 6,\ 3b - 1, ...$

Si la primera es una progresión geométrica y la segunda aritmética, calcula c en la siguiente progresión geométrica: a, c, b.

Resolución:

En toda PG el cociente de dos términos consecutivos es constante.

$\frac{a + b}{a} = \frac{a + 4b}{a + b}$

$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 4ab$

$b^2 - 2ab = 0$

$b(b - 2a) = 0 \Rightarrow b = 2a \qquad ...\ (I)$

En toda PA la diferencia de dos términos consecutivos es constante.

$6 - (a - 1) = 3b - 1 - 6$

$7 - a = 3b - 7 \Rightarrow a + 3b = 14 \quad ...\ (II)$

De (I) y (II): $a = 2$; $b = 4$

Luego la sucesión: a; c; b; ... será: 2; c; 4 (razón q, q)

$\frac{c}{2} = \frac{4}{c} \Rightarrow c^2 = 8 \qquad \therefore c = 2\sqrt{2}$

Actividades de razonamiento

1. Halla el valor de x, en:
12; 0, 0; 11; 33; 69; 127; x

A) 193 B) 222 C) 145
D) 175 E) 158

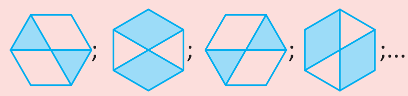
2. Indica la letra que sigue:
B; J; M; L; H

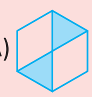
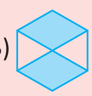
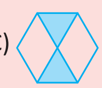
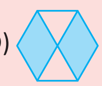
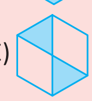
A) M B) R C) V
D) B E) T

3. Halla el término que ocupa el lugar 20 (t_{20}) en la siguiente sucesión aritmética:
x; 2x – 4; ...; y; y + 7

A) 96 B) 131 C) 122
D) 110 E) 144

4. Indica la figura que sigue:



A)  B)  C) 
D)  E) 

5. Halla el término enésimo en la siguiente sucesión:
3; 8; 15; 24; 35; ...

A) $n^2 + 3n$ B) $n^2 + 2n$ C) $n^2 + 6$
D) $2n + 3$ E) $n^2 - 2n$

6. En una PG el segundo término es 18 y el quinto término es 16/3. Calcula el cuarto término.

A) 10 B) 8 C) 6
D) –6 E) –8

7. Halla el término de lugar 10 (t_{10}) de la siguiente sucesión:

$$\frac{3}{4}; \frac{7}{7}; \frac{11}{10}; \frac{15}{13}; \frac{19}{16}$$

A) 39/31 B) 36/23 C) 51/38
D) 27/13 E) 29/17

8. Halla x, en:
2; 3; 4; 5; 126; x

A) 307 B) 607 C) 509
D) 225 E) 425

9. La suma de tres números en PA es 12 y la suma de sus cuadrados es 66. Calcula el mayor término de la progresión creciente.

A) 7 B) 8 C) 15
D) 12 E) 10

10. El costo de perforación de un pozo de cierta profundidad es de S/.4 para el primer metro y S/.2 más por cada metro adicional. Si el costo de la perforación total es S/.990, ¿cuál es la profundidad del pozo?

A) 25 m B) 26 m C) 27 m
D) 20 m E) 30 m

11. En una PA la suma de los n primeros términos está dada por la relación:

$$S_n = \frac{n(3n+13)}{2}$$

Halla el término de lugar 400.

A) 1200 B) 1231 C) 1205
D) 1208 E) 1235

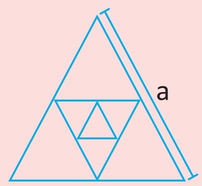
12. La suma de los veinte primeros términos enteros positivos de una PA creciente es 650. Halla la razón si es mayor que 1.

A) 3 B) 2 C) 6
D) 4 E) 5

13. En una P.A. la razón y el número de términos son iguales. La suma de los términos es 156 y la diferencia de los extremos es 30. Calcula el primer término.

A) 12 B) 15 C) 9
D) 10 E) 11

14. Calcula la suma de los perímetros de los infinitos triángulos equiláteros como se muestra en la figura (los vértices son los puntos medios de los lados del triángulo anterior).



A) 8a B) 5a C) 6a D) 10a E) 15a

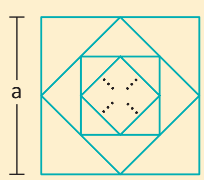
Claves

1. B	5. B	9. A	13. E
2. D	6. B	10. E	14. C
3. E	7. A	11. C	
4. C	8. B	12. A	

Reto



Calcula la suma de los perímetros de los infinitos cuadrados como se muestra en la figura (los vértices son los puntos medios de los lados del cuadrado anterior).



Rpta.: $4a\left[2+\sqrt{2}\right]$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. En la sucesión:
   120; 120; 60; 20;...
   Halla el tercer término después del 60.

   A) 5 B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

2. Calcula x.
   7; 8; 14; 16; 20; 24; 25; x; 29

   A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

3. Las edades de 3 hermanos están en PG, el producto de todos ellos es 110 592 y el más joven de ellos tiene 24 años. ¿Qué edad tiene el mayor?

   A) 70 años B) 80 años C) 96 años
   D) 81 años E) 72 años

4. ¿Qué número sigue en la sucesión?
   1; 3; 3; 6; 12; 12; ...

   A) 24 B) 36 C) 60
   D) 72 E) 144

5. ¿Cuáles son las dos letras que siguen?
   O; L; P; M; Q; N; ...; ...

   A) R; O B) R; Ñ C) O; P
   D) S; O E) R; S

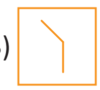
6. Halla el número que continúa:
   2; 4; 10; 22; 42; ...

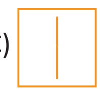
   A) 30 B) 20 C) 70 D) 48 E) 72

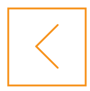
7. Halla la figura que sigue en:

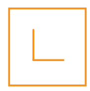


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

8. Halla x, en:
   4; 8; 11; 44; 49; x

   A) 156 B) 135 C) 98 D) 234 E) 294

9. Halla y, en:
   5; 12; 18; 26; 31; 40; x; y

   A) 54 B) 82 C) 72 D) 123 E) 53

10. Halla x, en:
1; 4; 9; 16; 73; x

A) 225 B) 425 C) 276
D) 133 E) 327

NIVEL 2

11. El término que sigue en la sucesión:
$\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -3; -\frac{41}{3}; ...$

UNI 2009-II

A) $-\frac{169}{3}$ B) $-\frac{162}{3}$ C) $-\frac{156}{3}$
D) $-\frac{148}{3}$ E) $-\frac{142}{3}$

12. ¿Qué número continúa para cada caso, respectivamente?
I. 2; 3; 2; 4; 4; 6; 12; 9; ...
II. 2; 4; 10; 22; ...

A) 48 y 42 B) 48 y 50 C) 42 y 48
D) 42 y 40 E) 48 y 40

13. En la siguiente sucesión halla y/x.
7; 7; 6; 12; 4; 4; 3; 6; 2; 2; x; y; ...

A) 0,5 B) 2 C) 0,75
D) 3 E) 0,8

14. Halla el conjunto de letras que continúan en la sucesión mostrada:
CDE; DGI; EJM; FMP; ...

A) GPU B) GOU C) HPT
D) GOT E) HIT

15. Un basquetbolista anotó puntos en cada partido, del siguiente modo: 5 puntos en el primer partido, 9 en el segundo, 13 en el tercero y así continuó hasta el final del campeonato. ¿Cuántos partidos jugó el basquetbolista en el campeonato, si en la final anotó 101 puntos y campeonó?

A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 29

16. Tres números en PA dan por producto 1287. Si el número menor es 9, ¿cuál es la suma de los números?

A) 27 B) 30 C) 33
D) 35 E) 42

17. Determina el decimoctavo término de la siguiente sucesión.

$$\frac{3}{2}; \frac{9}{10}; \frac{19}{24}; \frac{33}{44}; \frac{51}{70}; ...$$

A) 339/494 B) 519/752
C) 649/954 D) 659/949
E) 713/1070

18. El término de lugar 18 de una PA es 3 y el término de lugar 52 es 173. Calcula el término de lugar 32.

A) 70 B) 72 C) 73
D) 78 E) 82

19. Determina el tercer término positivo de la siguiente sucesión y el lugar que ocupa.

−2432; −2425; −2418; −2411

A) 12; 251 B) 16; 249 C) 18; 251
D) 20; 248 E) 18; 351

20. ¿Cuántos términos de 3 cifras presenta la siguiente sucesión?

3; 9; 19; 33; ...

A) 8 B) 10 C) 14
D) 15 E) 26

NIVEL 3

21. Si a_1; a_2; a_3; ... es una PA tal que $a_3 = 8$ y $a_8 = 3$. Calcula: $(a_{10})^2 + (a_{10}) + 3$

A) 3 B) 8 C) 15
D) 5 E) 23

22. Si las siguientes sucesiones son PG, calcula z.

x + 4; x; x − 2
y + 1; 3y; 9y − 6
y; x; z

A) 10 B) 12 C) 14
D) 8 E) 15

23. Halla la razón de una PG de 7 términos sabiendo que la suma de los 3 primeros términos es 26 y la suma de los 3 últimos es 2106.

A) 1 B) 3 C) 6
D) 9 E) 27

24. Las siguientes progresiones tienen términos comunes. Halla el sexto término común.

S_1 : −81; −77; −73; −69; ...

S_2 : 2; 5; 8; 11; ...

A) 23 B) 83 C) 59
D) 71 E) 252

25. ¿Cuántos términos de la siguiente sucesión: 18(13); 18(14); 18(15); ...; 18(1700) son cubos perfectos?

A) 3 B) 4 C) 7
D) 6 E) 9

26. Si en la sucesión cuya forma general es $t_n = \frac{n}{2n+2}$ se eliminan los términos pares, la nueva sucesión tendrá como forma general a:

A) $\frac{2n-1}{4n}$ B) $\frac{3n+1}{4n}$

C) $\frac{2n+1}{2n+3}$ D) $\frac{2n-1}{3n}$

E) $\frac{2n-1}{5n}$

27. El término enésimo de la siguiente sucesión tiene la forma $t_n = a^{nb-c}$, donde a; b y c son enteros. Halla: a + b + c

0,125; 0,5; 2; 8; ...

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

28. En la siguiente sucesión de números enteros, halla el término que sigue.

$\sqrt{\overline{ANA}}; \overline{A(N+1)}; \overline{A(N+3)}; \overline{A(N+5)}$

A) 23 B) 21 C) 16
D) 15 E) 19

29. Dadas las sucesiones:

S_1: 7; 12; 17; 22; ...; 297
S_2: 4; 11; 18; 25; ...

¿Cuántos términos son comunes a ambas sucesiones?

A) 6 B) 8 C) 10
D) 14 E) 12

30. Los términos de una sucesión definidos por $t_n = 8n^2 - 6n + 3$ ocupan los lugares impares de una nueva sucesión y los términos de la sucesión definidos por $t_n = 8n^2 + 2n + 2$ ocupan los lugares pares de la misma sucesión. Calcula el término enésimo de la nueva sucesión formada.

A) $2n^2 + 2n - 2$ B) $2n^2 - 2n + 2$
C) $2n^2 + n + 2$ D) $n^2 + 2n$
E) $n^2 + 2n + 2$

Claves

NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		
1. B	10. C	11. A	18. C	21. D	26. A
2. E		12. A	19. E	22. D	27. E
3. C		13. B	20. D	23. B	28. E
4. C		14. D		24. D	29. B
5. B		15. B		25. B	30. C
6. E		16. C			
7. C		17. C			
8. E					
9. A					

Series sumatorias

SERIE NUMÉRICA

Se denomina así a la adición indicada de los términos de una sucesión numérica llamándose al resultado de la adición valor de la serie.

n.° ordinal	1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Sucesión:	2	4	7	10	13	16

Serie: 2 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16

Serie aritmética

Es la adición indicada de los términos de una sucesión aritmética.

Ejemplo:
Calcula el valor de la siguiente serie:

$$S = 3 + 8 + 13 + 18 + 23 + ... + 48$$

Resolución:
Para calcular el valor de la serie es necesario conocer la cantidad de sumandos.
El término enésimo de la serie es: $t_n = 5n - 2$
Ahora igualamos al último término: $5n - 2 = 48$

$$\Rightarrow n = 10$$

Lo cual indica que el número de términos es 10, entonces:

	1.°		2.°		3.°		4.°		5.°		6.°		7.°		8.°		9.°		10.°
S =	3	+	8	+	13	+	18	+	23	+	28	+	33	+	38	+	43	+	48

23 + 28 = 51
18 + 33 = 51
13 + 38 = 51
8 + 43 = 51
3 + 48 = 51

S = 51 + 51 + 51 + 51 + 51
S = 51(5)
Dando forma:

$$S = \frac{(3 + 48)(10)}{2}$$

- 3: 1.er término
- 48: Último término
- 10: Número de términos
- 2: Constante

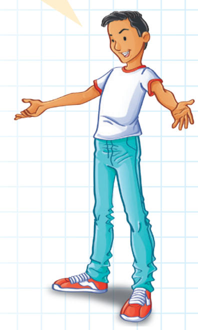
En general:

$$S = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right)n$$

Donde:
S: valor de la serie
t_n: último término
t_1: 1.er término
n: cantidad de términos

Recuerda

En general:
Sea: $t_1; t_2; t_3; ..., t_n$
"sucesión numérica"
$\Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$, es:
"serie asociada a la sucesión numérica dada"



Observación

También se puede utilizar:

$$S = \left(t_1 + \frac{(n-1)r}{2}\right)n$$

Ejemplo:
Calcula
$S = \underbrace{17 + 21 + 25 + ...}_{20 \text{ sumandos}}$

$$S = \left(17 + \frac{(20-1)4}{2}\right)20$$

$\therefore S = 1100$



Serie geométrica

Es la adición indicada de los términos de una sucesión geométrica. La serie geométrica puede ser finita o infinita según la naturaleza de la sucesión.

Serie geométrica finita

Ejemplo:

Dada la PG finita: 2; 6; 18; 54; 162; 486; 1458. Calcula el valor de la serie.

Resolución:

La cantidad de términos es n = 7.

Así: 1.° 2.° 3.° 4.° 5.° 6.° 7.°

$S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458$

Dando forma:

$S = 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3^5 + 2 \times 3^6$

Multiplicamos por la razón (q = 3)

$$- \begin{cases} 3S = 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3^5 + 2 \times 3^6 + 2 \times 3^7 \\ S = 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3^5 + 2 \times 3^6 \end{cases}$$

$3S - S = 2 \times 3^7 - 2$

$(3 - 1)S = 2 \times (3^7 - 1)$

$\Rightarrow S = \dfrac{2(3^7 - 1)}{3 - 1}$

Luego:

$2\left(\dfrac{3^7 - 1}{3 - 1}\right)$

- 2 → 1.er término
- 7 → Número de términos
- 3 → Razón geométrica

En general:

$$S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Donde:

S: valor de la serie

t_1: 1.er término

q: razón geométrica

n: número de términos

Serie geométrica infinita

Ejemplo:

Calcula el valor de la serie $S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + ...$

Resolución:

Multiplicamos por 1/2 a ambos miembros de la igualdad:

$$- \begin{cases} \dfrac{1}{2}S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + ... \\ S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + ... \end{cases}$$

$S - \dfrac{1}{2}S = \dfrac{1}{2}$

$S\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

Luego:

$S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$

- $\frac{1}{2}$ (numerador) → 1.er término
- $\frac{1}{2}$ (en $1 - \frac{1}{2}$) → Razón geométrica

En general:

$$S = \frac{t_1}{1 - q}$$

Donde:

S: valor de la serie

q: razón geométrica

t_1: 1.er término

Recuerda

En toda PG cada término comprendido entre el primero y el último, es igual a la raíz cuadrada del producto de sus dos términos adyacentes.

Ejemplo:

3; 6; 12; 24; 48; 96

×2 ×2 ×2 ×2 ×2

- $6 = \sqrt{3 \times 12}; 12 = \sqrt{6 \times 24}$



Observación

Ejemplo:

Halla el valor de:

$S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{243}$

$S = 3^2 + 3^1 + 3^0 + 3^{-1} + ... + 3^{-5}$

$\times\frac{1}{3}\ \times\frac{1}{3}\ \times\frac{1}{3}$

$S = \dfrac{9\left[\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \dfrac{3280}{243}$



Atención

Calcula el valor de S_L.

$S_L = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + ...$

$\times\frac{2}{3}\ \times\frac{2}{3}\ \times\frac{2}{3}$

$S_L = \dfrac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{2}{3}}$

$\therefore S_L = \frac{9}{4}$

SUMATORIAS

Si queremos representar la serie numérica en forma abreviada, usaremos el operador matemático sumatoria Σ.

$$t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + \ldots + t_n = \sum_{k=m}^{n} t_k$$

Propiedades

1. $$\sum_{k=a}^{n} C = (n - a + 1)C; \text{ donde C es una constante.}$$

2. $$\sum_{k=m}^{n} Ct_k = C\sum_{k=m}^{n} t_k$$

3. $$\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$$

4. $$\sum_{k=m}^{n} t_k = \sum_{k=m}^{m+p} t_k + \sum_{k=m+p+1}^{n} t_k$$

Observación

Ejemplos:

- $\sum_{k=5}^{83} 7 = (83 - 5 + 1)7$
- $\sum_{k=11}^{37} 5k^2 = 5\sum_{k=11}^{37} k^2$
- $\sum_{k=13}^{56} (k^2 + k) = \sum_{k=13}^{56} k^2 + \sum_{k=13}^{56} k$
- $\sum_{k=9}^{44} k^3 = \sum_{k=9}^{20} k^3 + \sum_{k=21}^{44} k^3$



PRINCIPALES SERIES Y SUMAS NOTABLES

1. Suma de los n primeros números naturales.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n}_{\text{n sumandos}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Suma de los n primeros números pares naturales.

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = \underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n}_{\text{n sumandos}} = n(n+1)$$

3. Suma de los n primeros impares naturales.

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)}_{\text{n sumandos}} = n^2$$

Nota

Ejemplos:

$$\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20(21)}{2} = 210$$

$$\sum_{i=1}^{40} 2i = 40(41) = 1640$$

$$\sum_{i=1}^{53} (2i - 1) = 53^2 = 2809$$

4. Suma de los n primeros números cuadrados perfectos.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}_{\text{n sumandos}} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. Suma de los n primeros números cubos perfectos.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

6. Suma de los “n” primeros productos consecutivos tomados de 2 en 2.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

7. Suma de los “n” primeros productos consecutivos tomados de 3 en 3.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

SUMA DE TÉRMINOS DE UNA SERIE CONOCIENDO SU TÉRMINO ENÉSIMO

Ejemplo:

Calcula la suma de los n primeros términos de la sucesión cuyo término enésimo es:

$$t_n = n^2 + n + 3$$

Resolución:

Como $t_n = n^2 + n + 3$ usamos la notación Σ y planteamos.

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k + 3) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 3n}$$

Nota

Ejemplos:

$$\sum_{i=1}^{13} i^3 = \left[\frac{13(14)}{2}\right]^2 = 8281$$

$$\sum_{i=1}^{29} i(i+1) = \frac{29 \times 30 \times 31}{3} = 8990$$

$$\sum_{i=1}^{16} i(i+1)(i+2) = \frac{16 \times 17 \times 18 \times 19}{4} = 23\ 256$$

Recuerda

La fórmula depende de la forma del término enésimo.

Ejemplo:

- $t_n = 5n^3 + 3n^2 + 8$

  $\Rightarrow S_n = 5\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + 8n$

- $t_n = 8n^2 + 5n - 3$

  $\Rightarrow S_n = \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{5n(n+1)}{2} - 3n$



SUMA DE UNA SERIE ASOCIADA A UNA SUCESIÓN POLINOMIAL USANDO NÚMEROS COMBINATORIOS

Veamos una sucesión polinomial de orden 4.

Dada la sucesión polinomial: $t_1; t_2; t_3; t_4; \ldots ; t_n$

1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	...	n.°
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6		t_n
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5			
p_1	p_2	p_3	p_4				
v_1	v_2	v_3					
z	z						

Entonces la suma de sus términos:

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots + t_n$$

Se obtiene a partir de:

$$S_n = t_1 C_1^n + r_1 C_2^n + p_1 C_3^n + v_1 C_4^n + zC_5^n$$

Ejemplo:

Halla el valor de la serie en:

$$S = \underbrace{4 + 5 + 8 + 18 + 43 + 94 + 185 + \ldots}_{20 \text{ sumandos}}$$

Resolución:

Aplicando la fórmula:

1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°
4	5	8	18	43	94	185
1	3	10	25	51	91	
2	7	15	26	40		
5	8	11	14			
3	3	3				

Luego: $S_n = 4C_1^n + 1C_2^n + 2C_3^n + 5C_4^n + 3C_5^n$

Para n = 20: $S_{20} = 4C_1^{20} + 1C_2^{20} + 2C_3^{20} + 5C_4^{20} + 3C_5^{20}$

$$S_{20} = 4 \times \frac{20}{1} + 1 \times \frac{20 \times 19}{2 \times 1} + 2 \times \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} + 5 \times \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + 3 \times \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$S_{20} = 80 + 190 + 2280 + 24\,225 + 46\,512$

$\therefore S_{20} = 73\,287$

Recuerda

La fórmula dependerá del orden de la sucesión.

Ejemplo:

4;	11;	22;	37;	56
7	11	15	19	
4	4	4		

$S_n = 4C_1^n + 7C_2^n + 4C_3^n$



Atención

Ejemplos:

$C_3^{15} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1}$

$C_4^{36} = \frac{36 \times 35 \times 34 \times 33}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$C_{95}^{100} = C_5^{100}, 95 + 5 = 100 \Rightarrow$

$C_{95}^{100} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$



Problemas resueltos

1 Halla M – N si:

$$M = \underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + ...}_{52 \text{ términos}}$$

$$N = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + ...}_{50 \text{ términos}}$$

Resolución:

Aplicamos: $S = \left[t_1 + \dfrac{(n-1)r}{2}\right]n$

$M = \left[2 + \dfrac{(52-1)2}{2}\right]52 = 53 \times 52$

$M = 2756$

$N = \left[1 + \dfrac{(50-1)2}{2}\right]50 = 50 \times 50$

$N = 2500$

$\therefore M - N = 2756 - 2500 = 256$

2 Calcula S en:

$S = 5 + 5 + 20 + 50 + 95 + ...$ (20 sumandos)

Resolución:

20	5	5	20	50	95
–15	0	15	30	45	
15	15	15	15		

$r = 15;\ P_0 = -15;\ t_0 = 20$

$a = \dfrac{15}{2};\ b = -15 - \dfrac{15}{2} = -\dfrac{45}{2};\ c = 20$

$t_n = \dfrac{15}{2}n^2 - \dfrac{45}{2}n + 20$

Luego: $S = \sum_{n=1}^{20}\left(\dfrac{15}{2}n^2 - \dfrac{45}{2}n + 20\right)$

$$S = \frac{15}{2}\sum_{n=1}^{20} n^2 - \frac{45}{2}\sum_{n=1}^{20} n + 20\sum_{n=1}^{20}$$

Reemplazamos $n = 20$:

$S = \dfrac{15}{2} \cdot \dfrac{20(21)(41)}{6} - \dfrac{45}{2} \cdot \dfrac{20(21)}{2} + 20.20$

$S = 25 \times 21 \times 41 - 45 \times 105 + 400$

$S = 21\,525 - 4725 + 400 \quad \therefore S = 17\,200$

3 Halla:

$$S = \underbrace{3 + 33 + 333 + 3333 + ... + 333...3}_{n \text{ sumandos}}$$

Resolución:

Multiplicamos por 3:

$3S = 9 + 99 + 999 + 9999 + ... + 999 ... 9$

$3S = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + ... + (10^n-1)$

$3S = 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n - n$

$3S = \dfrac{10^{n+1} - 10}{10 - 1} - n$

$3S = \dfrac{10^{n+1} - 10}{9} - n \Rightarrow 3S = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$

$\therefore S = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$

4 ¿Cuántos términos tiene la suma?

$S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + ... + \dfrac{1}{3^n}$

Para que sea igual a $\dfrac{3280}{6561}$.

Resolución:

Aplicamos: $S = \dfrac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$

$t_1 = \dfrac{1}{3};\ q = \dfrac{1}{3}$

$S = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \dfrac{3280}{6561}$

$\dfrac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)}{-\frac{2}{3}} = \dfrac{3280}{6561}$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 1 = -\dfrac{6560}{6561}$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{6561}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^8$

$\therefore n = 8$

5 Halla el valor de: $\sum_{k=1}^{10}(2^k - 4k + 3)$

Resolución:

Aplicando propiedad de sumatorias:

$$\sum_{k=1}^{10} 2^k - \sum_{k=1}^{10} 4k + \sum_{k=1}^{10} 3$$

$$\frac{2^{k+1} - 2}{2-1} - \frac{4k(k+1)}{2} + 3k$$

Reemplazando $k = 10$:

$2^{11} - 2 - 2 \times 10 \times 11 + 3 \times 10$

$= 2046 - 220 + 30$

$= 1856$

6 Halla el valor de la expresión:

$$6\sum_{m=1}^{100}(3m^2 - 2) - 3\sum_{m=20}^{100}(6m^2 - 4)$$

Resolución:

Aplicando propiedades de sumatorias:

$$18\sum_{m=1}^{100} m^2 - 12\sum_{m=1}^{100} - 18\sum_{m=20}^{100} m^2 - 12\sum_{m=20}^{100}$$

$$18\sum_{m=1}^{100} m^2 - 12\sum_{m=1}^{100} - 18\left[\sum_{m=1}^{100} m^2 - \sum_{m=1}^{19} m^2\right] + 12\sum_{m=20}^{100}$$

$$18\sum_{m=1}^{100} m^2 - 12\sum_{m=1}^{100} - 18\sum_{m=1}^{100} m^2 + 18\sum_{m=1}^{19} m^2 + 12\sum_{m=20}^{100}$$

$$18\sum_{m=1}^{19} m^2 - 12\sum_{m=1}^{100} + 12\sum_{m=20}^{100}$$

$$18 \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - 12 \times 100$$
$$+ 12(100 - 20 + 1)$$

$3 \times 19 \times 20 \times 39 - 1200 + 12 \times 81$

$44\,460 - 1200 + 972 = 44\,232$

7 El primer término de una PA es n, el número de términos n y la razón n. Calcula la suma.

Resolución:

Sea la serie:

$$S = \underbrace{n + 2n + 3n + \ldots + [n + (n-1)n]}_{n \text{ términos}}$$

$$S = \left(\frac{n + [n + (n-1)n]}{2}\right)n$$

$$S = \left(\frac{2n + n^2 - n}{2}\right)n$$

$$S = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)n$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}n$$

$$\therefore S = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

8 Sabiendo que:

$$S_n = \underbrace{20^2 + 19^2 + 18^2 + 17^2 + \ldots}_{n \text{ términos}}$$

Calcula:

$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{20}$

Resolución:

$S_1 = 20^2$

$S_2 = 20^2 + 19^2$

$S_3 = 20^2 + 19^2 + 18^2$

$S_4 = 20^2 + 19^2 + 18^2 + 17^2$

$\vdots$

$S_{20} = 20^2 + 19^2 + 18^2 + 17^2 + \ldots + 1^2$

$S = 20(20^2) + 19(19^2) + 18(18^2) + \ldots + 1^3$

$S = 20^3 + 19^3 + 18^3 + \ldots + 1^3$

$$S = \left[\frac{20(21)}{2}\right]^2$$

$\therefore S = 44\,100$

9 Calcula la suma de los n términos de la sucesión:
0; 8; 52; 156; 344; 640; ...

Resolución:

0; 8; 52; 156; 344; 640; ...
8 44 104 188 296
36 60 84 108
24 24 24

$t_1 = 0; r_1 = 8; p_1 = 36; v_1 = 24$

$S = t_1C_1^n + r_1C_2^n + p_1C_3^n + v_1C_4^n$

$S = 0C_1^n + 8C_2^n + 36C_3^n + 24C_4^n$

$$S = 8.\frac{n(n-1)}{2\times 1} + 36\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1} + 24\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times 3\times 2\times 1}$$

$= 4n(n-1) + 6n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)$

$= 4n^2 - 4n + 6n(n^2 - 3n + 2) + (n^2 - 3n)(n^2 - 3n + 2)$

$= 4n^2 - 4n + (n^2 - 3n + 2)(6n + n^2 - 3n)$

$= 4n^2 - 4n + (n^2 - 3n)^2 + (2 + 6n)(n^2 - 3n) + 12n$

$= 4n^2 - 4n + n^4 - 6n^3 + 9n^2 + 2n^2 - 6n + 6n^3 - 18n^2 + 12n$

$\therefore S = n^4 - 3n^2 + 2n$

10 Se tiene la siguiente sucesión:
1; 5; 15; 34; 65; 111; ...

Halla:

a) El término de número ordinal 20.

b) La suma de los 20 primeros términos.

Resolución:

Hallamos el término enésimo:

(0) 1; 5; 15; 34; 65; 111
(1) 4 10 19 31 46
(3) 6 9 12 15
(3) 3 3 3

Entonces:

$t_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Donde:

$t_0 = 0 = d$

$t_1 = 1 = a + b + c$

$t_2 = 5 = 8a + 4b + 2c$

$t_3 = 15 = 27a + 9b + 3c$

$a = \frac{1}{2}; b = 0; c = \frac{1}{2}; d = 0$

$\Rightarrow t_n = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n$

a) $t_{20} = \frac{1}{2}(20)^3 + \frac{1}{2}(20)$

$\therefore t_{20} = 4010$

b) $$\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20}n^3 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20}n$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{20(21)}{2}\right]^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{20(21)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}210^2 + \frac{1}{2}210$$

$$= 22\,155$$

Actividades de razonamiento

1. Halla el valor de R si:
$R = 0{,}1 + 0{,}2 + ... + 0{,}9 + 0{,}1 + 0{,}11 + ... + 0{,}8$

A) 32,40 B) 36,40 C) 36,45
D) 38 E) 36,80

2. Efectúa:

$$\sum_{a=8}^{22}(3a-1)$$

A) 680 B) 690 C) 610
D) 660 E) 670

3. Halla $\sqrt{a+n+7}$, si:
$1 + 2 + 3 + ... + n = \overline{aaa}$

A) 9 B) 12 C) 7
D) 11 E) 8

4. Una pelota cae de una altura de 18 metros y cada vez que rebota pierde 1/3 de la altura desde la cual cae. Calcula la distancia recorrida por la pelota hasta quedar teóricamente en reposo.

A) 85 B) 70 C) 95
D) 90 E) 100

5. Calcula:

$$\sum_{k=1}^{10}\left(3k^2 - \frac{1}{5}k^3\right)$$

A) 500 B) 550 C) 450
D) 555 E) 535

6. Resuelve:

$$\sum_{i=1}^{z}\left(\sum_{i=1}^{y}\left(\sum_{i=1}^{x}a\right)\right)$$

A) axyz B) a^2xyz C) a^3xyz
D) $a(x+y)(x-z)(y+z)$ E) $ax^2y^2z^2$

7. La suma de todos los números de la forma $(3k + 2)$, para $k = 1; 2; 3; ...; n$, es:

A) $\frac{n(3n+7)}{2}$ B) $\frac{n(3n-7)}{2}$ C) $\frac{(3n+2)}{2}$
D) $\frac{(3n-2)}{2}$ E) $\frac{n(3n+5)}{2}$

8. Calcula S, considerando los 100 primeros términos de la serie:
$S = 1 + 3 + 2 + 2 + 6 + 4 + 3 + 9 + 6 + ...$

A) 3500 B) 280 C) 3200
D) 3700 E) 3400

9. Calcula la suma de los 20 primeros términos de:
$-1; 0; 0; 0; 1; 4; \dots$

A) 3875 B) 5525 C) 2750
D) 6325 E) 3875

10. Halla el valor de:

$$L = \frac{1}{3.6} + \frac{1}{6.9} + \frac{1}{9.12} + \dots + \frac{1}{30.33}$$

A) $\frac{10}{99}$ B) $\frac{29}{30}$ C) $\frac{30}{33}$
D) $\frac{31}{98}$ E) $\frac{7}{97}$

11. Halla el valor de P, si:

$$P = 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{20} + \frac{3}{100} + \frac{3}{500} + \frac{3}{2500} + \dots$$

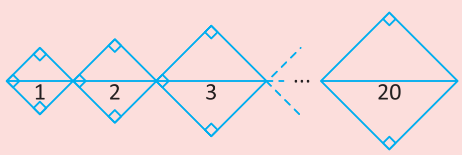
A) 6,45 B) 6,35 C) 5,9375
D) 6,15 E) 5,06

12. Calcula el valor de la serie:

$$S = 42 \times 1 + 41 \times 2 + 40 \times 3 + \dots + 2 \times 41 + 1 \times 42$$

A) 13 241 B) 15 225 C) 12 424
D) 14 244 E) 13 244

13. Calcula el perímetro de la figura mostrada si las diagonales de los cuadrados miden 1; 2; 3; ... ; 20 cm.



A) $210\sqrt{2}$ cm B) $400\sqrt{2}$ cm C) $420\sqrt{2}$ cm
D) $540\sqrt{2}$ cm E) $560\sqrt{2}$ cm

14. Efectúa la suma de:

$$\begin{array}{l} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 30^2 \\ \quad 2^2 + 3^2 + \dots + 30^2 \\ \qquad 3^2 + \dots + 30^2 \\ \qquad\quad \ddots \quad \vdots \\ \qquad\qquad 30^2 \end{array}$$

A) 216 225 B) 246 016 C) 142 884
D) 105 625 E) 189 225

Claves

1. C
2. D
3. C
4. D
5. B
6. A
7. A
8. E
9. E
10. A
11. C
12. E
13. C
14. A

Reto



Halla n en:

$$\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4} \dots = \frac{5}{7}; 0 < \frac{1}{n} < 1$$

Rpta.: 6

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Halla el valor de A si:

$A = 2 + 5 + 10 + 17 + ... + 2501$

A) 42 000 B) 42 900 C) 42 500
D) 42 950 E) 42 975

2. Halla:

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{i}\right)$$

A) $\frac{25}{12}$ B) 4 C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

3. Halla el valor de x si:

$x = 7 + 10 + 13 + ... + 304$

A) 15 000 B) 15 550 C) 15 500
D) 15 600 E) 16 000

4. Halla:

$$\sum_{i=1}^{15} 3i$$

A) 360 B) 420 C) 430
D) 380 E) 320

5. Halla:

$$\sum_{i=3}^{8}(i-5)^2$$

A) 18 B) 21 C) 19
D) 42 E) 20

6. Halla:

$$\sum_{i=2}^{4}\frac{1}{i^2-1}$$

A) $\frac{62}{120}$ B) $\frac{60}{121}$ C) $\frac{13}{120}$ D) $\frac{21}{40}$ E) $\frac{4}{3}$

7. Calcula el resultado de desarrollar:

$$E = \sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{2k}\right)$$

A) 4 B) 25/24 C) $\frac{11}{6}$
D) 4/9 E) 2/9

8. Halla la suma de los 60 primeros números naturales consecutivos.

A) 1830 B) 3600 C) 3660
D) 7260 E) 7400

9. Calcula la suma de los términos de la siguiente sucesión considerada hasta el tercer término que termine en 5.
6; 15; 24; 33;...

A) 2213 B) 2211 C) 2124
D) 2012 E) 2324

10. Halla la suma de los 30 primeros múltiplos de 5.

A) 2435 B) 1830 C) 2175
D) 1665 E) 1425

NIVEL 2

11. Calcula:

$$\sum_{n=4}^{15}\left(2n^3 - 5n + 10\right)$$

A) 28 628 B) 28 278 C) 29 268
D) 27 900 E) 29 368

12. ¿Cuál es el valor de la expresión: $R = \sum_{k=1}^{9} 2^k$?

A) 1022 B) 1024 C) 1023
D) 1021 E) 1025

13. Halla el valor de P si:

$P = (-1) + 2 + (-3) + 4 + (-5) + ... + (-169) + 170$

A) 85 B) 86 C) 90 D) 100 E) 170

14. Halla el valor de R si:

$$R = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + ... + \frac{2}{n(n+1)}$$

A) 2/n B) n/n+1 C) 2n/n + 1
D) n/2n +1 E) n/2

15. Halla el valor de w si:

$w = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + ... + 60 \times 63$

A) 70 000 B) 79 000 C) 79 003
D) 79 300 E) 76 500

16. Halla el valor de x si:

$x = 1 \times 2 \times 4 + 2 \times 3 \times 5 + ... + 10 \times 11 \times 13$

A) 4730 B) 4800 C) 4830
D) 4900 E) 5400

17. Halla el valor de B si:

$B = 3 + 8 + 15 + 24 + ... + 1680$

A) 23 700 B) 23 740 C) 23 780
D) 23 880 E) 25 000

18. La suma de 77 números enteros consecutivos termina en 8, ¿en qué cifra termina el número mayor de dichos números enteros?

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 1

19. Los números:
$a; 4a + 2b; 12a + 8b; ... ; 2^{n-1} . (n(a + b) - b)$ están en progresión geométrica, halla la suma.

UNMSM 2005-II

A) $4a(2^n - 1)$ B) $2^n . (a + b)$
C) $2^n(a - 2b)$ D) $a + 2^n . b$
E) $a(2^n - 1)$

20. Encuentra el valor de:
$S = 3 + 4 + 7 + 6 + 11 + 10 + 15 + 16 + ... + 119 + 874$

A) 5788 B) 10 000 C) 10 951
D) 8920 E) 10 940

NIVEL 3

21. Calcula el valor de S en:
$$S = \underbrace{1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 10 + 10 + 17 + ...}_{37 \text{ términos}}$$

A) 2589 B) 2569 C) 2619
D) 2662 E) 2659

22. Encuentra el valor de M en:
$$M = \underbrace{2 + 11 + 33 + 74 + 140 + ...}_{20 \text{ sumandos}}$$

A) 33 200 B) 51 200 C) 44 100
D) 38 500 E) 45 640

23. Halla n en:
$(3n + 2) + (3n + 4) + (3n + 6) + ... + (5n) = 41n$

A) 10 B) 9 C) 12 D) 11 E) 13

24. Halla el valor de la serie:
$$S = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + ...$$

A) 3/2 B) 5/2 C) 3 D) 6 E) 7/2

25 Halla el valor de:

$S = 4 \times 36 + 6 \times 34 + 8 \times 32 + 10 \times 30 + ... + 36 \times 4$

A) 5003 B) 5432 C) 5168
D) 5032 E) 5131

26 Encuentra el valor de S en:

$$S = \frac{1}{1024} + \frac{2}{512} + \frac{3}{256} + ... + \frac{10}{2}$$

A) $9\frac{1}{256}$ B) $8\frac{1}{256}$ C) $\frac{1}{1024}$

D) $10\frac{1}{128}$ E) $9\frac{1}{1024}$

27 La suma de 20 números impares consecutivos es 1200. Calcula la suma de los 30 impares consecutivos siguientes.

A) 3000 B) 2400 C) 3300
D) 3600 E) 2800

28 Calcular k, en:

$$\sum_{n=a}^{a+3}\left[\sum_{n=a}^{a+2}\left[\sum_{n=a}^{a+1}\left[\sum_{n=a}^{a}(k)\right]\right]\right] = 48k^2$$

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$

D) 3 E) $\frac{1}{3}$

29 Halla la siguiente suma:

$1(n) + 2(n - 1) + 3(n - 2) + ... + n(1)$

A) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ B) $\frac{n(n+1)(n+3)}{6}$

C) $n^2(n-1)(n+2)$ D) $\frac{(n^2-3)^2}{6}$

E) $\frac{(n^3-n)^3}{7}$

30 Calcula:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}\right]$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Claves

NIVEL 1			
1. E	9. B	17. C	25. C
2. A	10. C	18. A	26. E
3. B	**NIVEL 2**	19. E	27. C
4. A	11. B	20. E	28. C
5. C	12. A	**NIVEL 3**	29. A
6. D	13. A	21. E	30. A
7. B	14. C	22. E	
8. A	15. D	23. A	
	16. A	24. E	

Analogías y distribuciones numéricas

ANALOGÍAS NUMÉRICAS

Son agrupaciones de números en filas y columnas, donde el término central se obtiene haciendo algunas operaciones con los términos extremos.

Ejemplo:
Halla el número que falta:

5	(9)	64
23	(28)	125
38	( )	729

Resolución:
Operando con los extremos se tiene:

1.ª fila: $5 + \sqrt[3]{64} = 9$

2.ª fila: $23 + \sqrt[3]{125} = 28$

3.ª fila: $38 + \sqrt[3]{729} = 47$

∴ El número que falta es 47.

DISTRIBUCIONES NUMÉRICAS

En este caso se presentan grupos de números que están dispuestos en filas y columnas, pudiendo establecerse una relación entre filas o entre columnas, sin que la incógnita sea necesariamente el término central.

Ejemplo:
Encuentra el número que falta:

34	5	35
29	8	88
57	6	◯

Resolución:
Buscando una relación en las filas:

1.ª fila: $(3 + 4) \times 5 = 35$

2.ª fila: $(2 + 9) \times 8 = 88$

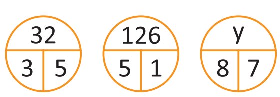
3.ª fila: $(5 + 7) \times 6 = 72$

∴ El número que falta es 72.

DISTRIBUCIONES GRÁFICAS

Consiste en distribuir los números que se van a relacionar, dentro de una o varias figuras.

Ejemplo:
Halla el valor de y:



Resolución:
Operamos con los números de la parte inferior para obtener el de arriba.

1.ª figura: $3^3 + 5 = 32$

2.ª figura: $5^3 + 1 = 126$

3.ª figura: $8^3 + 7 = 519$

∴ El valor de y es igual a 519.

Observación

Existen casos donde se debe considerar la suma de cifras de los números, para obtener el número central.

Ejemplo:
¿Qué número falta?

435	(6)	123
916	(7)	324
692	( )	473

Resolviendo:

1.ª fila:
$(4 + 3 + 5) - (1 + 2 + 3) = 6$

2.ª fila:
$(9 + 1 + 6) - (3 + 2 + 4) = 7$

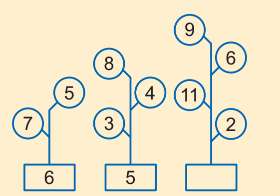
3.ª fila:
$(6 + 9 + 2) - (4 + 7 + 3) = 3$



Recuerda

En una distribución gráfica si las figuras no son iguales se debe tomar en cuenta las diferencias gráficas contables.

Ejemplo:
¿Qué número falta?



Consideremos el número de círculos:

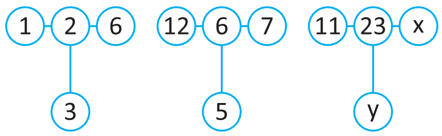
1.ª figura: 2 círculos
$\frac{7+5}{2} = 6$

2.ª figura: 3 círculos
$\frac{8+3+4}{3} = 5$

3.ª figura: 4 círculos
$\frac{9+6+11+2}{4} = 7$

Problemas resueltos

1 Si:



Halla xy, si x e y son de una cifra.

Resolución:

1.ª figura: $\sqrt{1+2+6} = 3$

2.ª figura: $\sqrt{12+6+7} = 5$

3.ª figura: $\sqrt{11+23+x} = y$

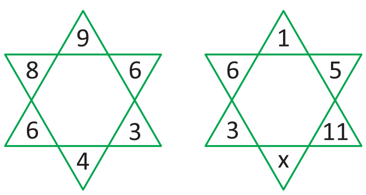
$\sqrt{34+x} = y$

$\downarrow \quad \downarrow$

$2 \quad 6$

$\therefore xy = 12$

2 Halla x.



Resolución:

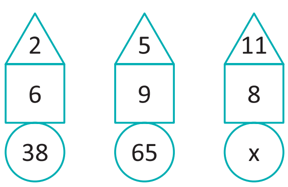
1.ª figura: $\begin{cases} \text{triángulo superior: } 9+6+3=18 \\ \text{triángulo invertido: } 8+6+4=18 \end{cases}$

2.ª figura: $\begin{cases} \text{triángulo superior: } 1+3+11=15 \\ \text{triángulo invertido: } 6+5+x=15 \end{cases}$

$x = 4$

$\therefore x = 4$

3 Halla x.



Resolución:

De cada figura tenemos:

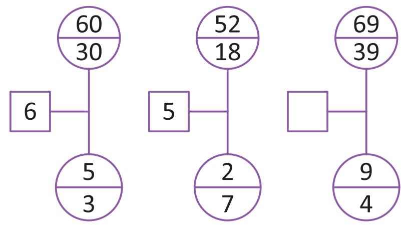
1.ª figura: $4(2) + 5(6) = 38$

2.ª figura: $4(5) + 5(9) = 65$

3.ª figura: $4(11) + 5(8) = 84$

$\therefore x = 84$

4 ¿Qué número falta?



Resolución:

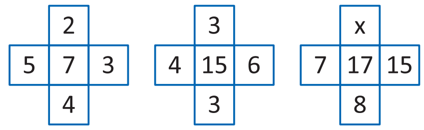
1.ª figura: $\dfrac{(60+30)}{5\times 3} = 6$

2.ª figura: $\dfrac{(52+18)}{2\times 7} = 5$

3.ª figura: $\dfrac{(69+39)}{9\times 4} = 3$

$\therefore$ El número que falta es 3.

5 Halla x.



Resolución:

1.ª figura: $5\times 3 - 2\times 4 = 7$

2.ª figura: $4\times 6 - 3\times 3 = 15$

3.ª figura: $7\times 15 - 8x = 17$

$105 - 8x = 17$

$88 = 8x \Rightarrow x = 11$

6 Calcula x + y.

3	5	14
5	6	31
2	x	11

6	3	39
7	2	51
y	8	17

Resolución:

En el 1.er arreglo:

1.ª figura: $3^2 + 5 = 14$

2.ª figura: $5^2 + 6 = 31$

3.ª figura: $2^2 + x = 11$

$4 + x = 11 \Rightarrow x = 7$

En el 2.° arreglo:

1.ª figura: $6^2 + 3 = 39$

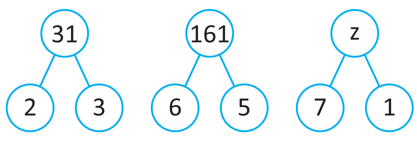
2.ª figura: $7^2 + 2 = 51$

3.ª figura: $y^2 + 8 = 17$

$y^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

$\therefore x + y = 7 + 3 = 10$

7 Calcula z.



Resolución:

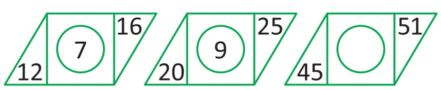
1.ª figura: $2^2 + 3^3 = 31$

2.ª figura: $6^2 + 5^3 = 161$

3.ª figura: $7^2 + 1^3 = 50$

$\therefore z = 50$

8 Encuentra el número que falta:



Resolución:

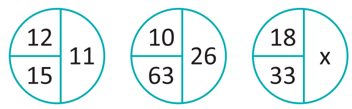
1.er gráfico: $\dfrac{16 + 12}{16 - 12} = 7$

2.° gráfico: $\dfrac{25 + 20}{25 - 20} = 9$

3.er gráfico: $\dfrac{51 + 45}{51 - 45} = 16$

$\therefore$ El número que falta es 16.

9 Halla x.



Resolución:

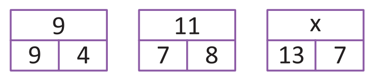
1.ª figura: $\dfrac{12}{2} + \dfrac{15}{3} = 11$

2.ª figura: $\dfrac{10}{2} + \dfrac{63}{3} = 26$

3.ª figura: $\dfrac{18}{2} + \dfrac{33}{3} = 20$

$\therefore x = 20$

10 Halla el valor de x.



Resolución:

1.er gráfico: $9 \times 4 = 36$

$3 + 6 = 9$

2.° gráfico: $7 \times 8 = 56$

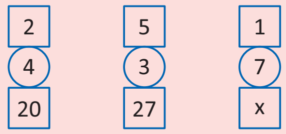
$5 + 6 = 11$

3.er gráfico: $13 \times 7 = 91$

$9 + 1 = 10$

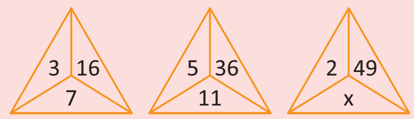
$\therefore x = 10$

1. Calcula x.



A) 19 B) 32 C) 17 D) 24 E) 18

2. Calcula x.



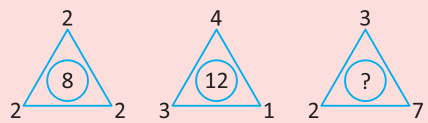
A) 15 B) 8 C) 9 D) 7 E) 13

3. Halla x.

36 (3) 45
24 (5) 49
72 (x) 88

A) 7 B) 2 C) 10 D) 4 E) 6

4. ¿Qué número falta?



A) 42 B) 12 C) 21 D) 6 E) 14

5. Halla x.

12	8	5	4
9	9	6	3
13	x	2	15

A) 15 B) 12 C) 23 D) 17 E) 20

6. Halla x

3 (7) 2
7 (44) 6
1 (7) 4
2 (x) 8

A) 8 B) 15 C) 20 D) 12 E) 16

7. Halla x.

3 (7) 2
5 (4) 1
4 (61) 3
2 (x) 4

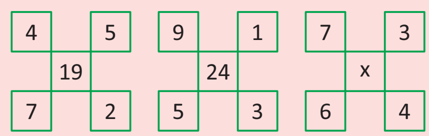
A) 12 B) 21 C) 9 D) 15 E) 18

8. Halla x.

8 (27) 5
5 (36) 1
4 (18) 2
3 (x) 2

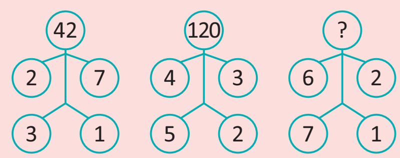
A) 36 B) 9 C) 5 D) 43 E) 12

9. Calcula x.



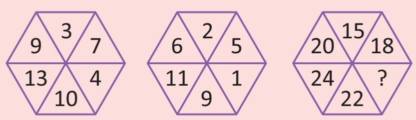
A) 29 B) 31 C) 72 D) 54 E) 27

10. Halla el número que falta.



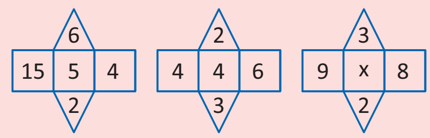
A) 84 B) 68 C) 48 D) 36 E) 72

11. Halla el número faltante.



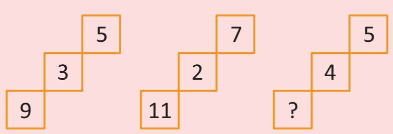
A) 18 B) 20 C) 12 D) 10 E) 15

12. Halla x.



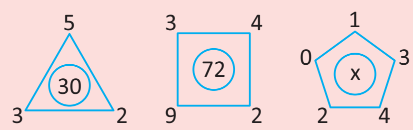
A) 9 B) 10 C) 11 D) 15 E) 12

13. Halla el número que falta.



A) 13 B) 7 C) 15 D) 18 E) 21

14. Calcula x.



A) 60 B) 50 C) 84 D) 48 E) 46

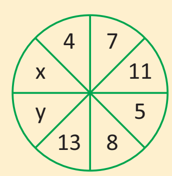
Claves

1. A	5. D	9. E	13. B
2. C	6. C	10. A	14. B
3. D	7. A	11. E	
4. B	8. B	12. E	

Reto



Determina el valor de x + y.

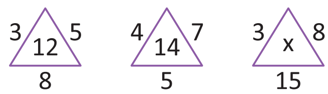


Rpta.: 26

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿Cuál es el número que falta?



A) 36 B) 26 C) 28 D) 30 E) 41

2. Encuentra el número que falta.

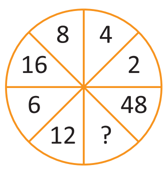
1	8
5	2

−3	−20
−8	−9

5	x
9	10

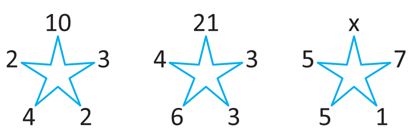
A) 10 B) 60 C) 75 D) 24 E) 5

3. Halla el número que falta.



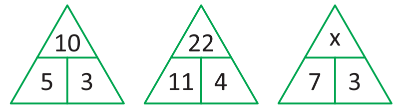
A) 11 B) 24 C) 14 D) 18 E) 40

4. Calcula el valor de x.



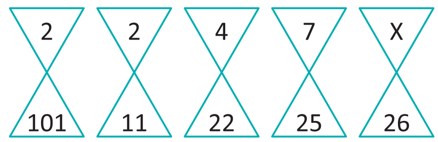
A) 45 B) 48 C) 34 D) 49 E) 70

5. Calcula el valor de x.



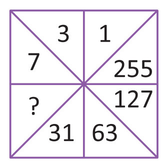
A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

6. ¿Cuál es el valor de x?



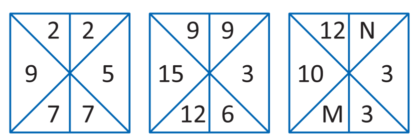
A) 8 B) 9 C) 7 D) 13 E) 12

7. Indica el número que falta.



A) 14 B) 15 C) 13 D) 30 E) 20

8. Los números considerados en los tres cuadrados cumplen una misma relación, identifica dicha relación y determina el valor de M + N.



UNI 2001-II

A) 20 B) 18 C) 12 D) 22 E) 15

9. Indica la alternativa que completa el cuadro siguiente:

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	3
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
6	x	48	y	6

UNI 2002-II

A) x = 8; y = 8 B) x = 6; y = 8
C) x = 6; y = 6 D) x = 5; y = 8
E) x = 7; y = 7

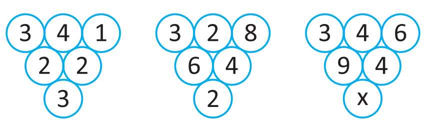
NIVEL 2

10. Calcula el valor de z.

6	(24)	42
3	(15)	27
17	(z)	5

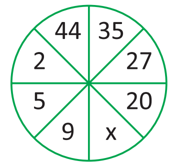
A) 11 B) 10 C) 15 D) 16 E) 14

11. ¿Cuál es el valor de x?



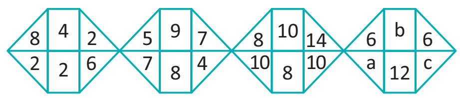
A) 2 B) 3 C) 5 D) 4 E) 7

12. Calcula x.



A) 14 B) 13 C) 12 D) 15 E) 17

13. Halla: a + b + c



A) 12 B) 16 C) 24 D) 22 E) 32

14. ¿Qué número falta?

5	6	4	12	3
33	34	32	?	24

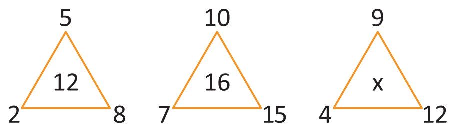
A) 36 B) 84 C) 40 D) 144 E) 96

15. ¿Cuál es el par de letras que faltan?

A	G	M	?
D	J	O	¿

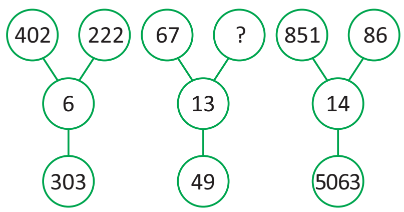
A) R / T B) S / R C) R / T D) T / U E) R / U

16. Calcula el valor de x.



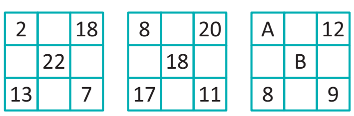
A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

17. Indica el número que corresponda al signo de interrogación.



A) 99 B) 168 C) 482
D) 1724 E) 2371

18. Los números consignados en los tres cuadros cumplen una misma relación. Identifica dicha relación y determina el valor de A + B.



UNI 2002-II

A) 20 B) 11 C) 15 D) 9 E) 16

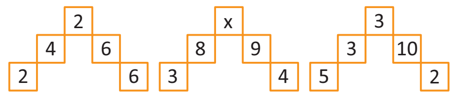
NIVEL 3

19. Calcula los números que faltan en el siguiente esquema y da como respuesta el valor de x + y.

8	20	37	59	86
5	7	10	14	x
13	27	47	73	y

A) 124 B) 105 C) 109 D) 114 E) 116

20. Calcula el valor de x.



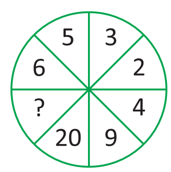
A) 8 B) 6 C) 3 D) 4 E) 7

21. Halla el número que falta.

12	13	7
13	15	10
11	14	7
14	12	?

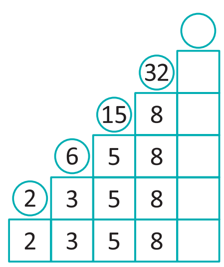
A) 9 B) 10 C) 8 D) 12 E) 11

22. Indica el número faltante.



A) 32 B) 36 C) 30 D) 42 E) 24

23. Indica la suma de las cifras del número que ocupa el círculo vacío.



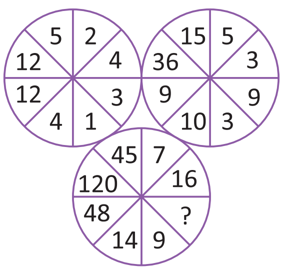
A) 60 B) 12 C) 14 D) 15 E) 6

(24) Calcula x.

43	32	73
52	41	29
80	52	x

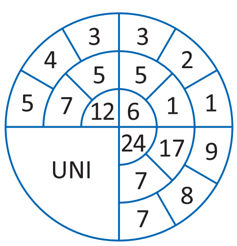
A) 24 B) 26 C) 30
D) 22 E) 20

(25) ¿Qué número falta?

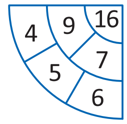


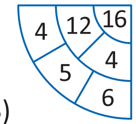
A) 15 B) 30 C) 45
D) 16 E) 24

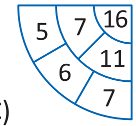
(26) En el círculo adjunto hay una serie numérica. Identifica la secuencia del cuadrante UNI.

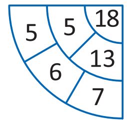


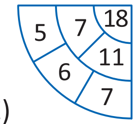
UNI 2002-II

A)


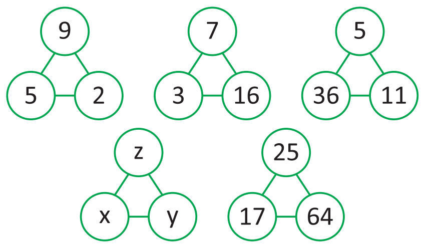
B)


C)


D)


E)


(27) Considera las siguientes distribuciones:



UNI 2009-I

Halla: $E = z - x - 3y$

A) 27 B) 18 C) 15
D) 20 E) 38

Claves

NIVEL 1	8. D	15. E	22. C
1. A	9. A	16. C	23. E
2. D	NIVEL 2	17. E	24. B
3. B	10. A	18. B	25. B
4. B	11. A	NIVEL 3	26. E
5. D	12. A	19. A	27. D
6. A	13. C	20. B	
7. B	14. E	21. C	

Desigualdades e inecuaciones

Recuerda

Además de intervalos abiertos y cerrados existen intervalos semiabiertos o semicerrados, tales como:

$\langle a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

$[a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$



DESIGUALDAD

Es aquella comparación que se establece entre dos números reales, mediante los símbolos de desigualdad: $<$; $>$; $\leq$; $\geq$.

Ejemplos:

$$3 < 5;\ -10 < -6;\ -2 > -7$$

LEY DE TRICOTOMÍA

Para cualquier número real a, se cumple una y solamente una de las siguientes relaciones:

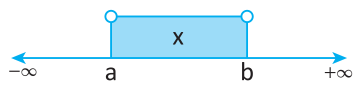
$$a > 0 \ \vee \ a = 0 \ \vee \ a < 0$$

INTERVALO

Es un subconjunto del conjunto de los números reales que está comprendido entre dos extremos.

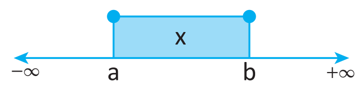
Intervalo abierto

Es el conjunto de todos los números $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$.



Intervalo cerrado

Es el conjunto de todos los números $x \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x \leq b$



Ejemplo:

Si $x > 5$ y $x \leq 8$, en qué intervalo se encuentra $x^2 + 3$.

Resolución:

$5 < x \leq 8$

$28 < x^2 + 3 \leq 67$



Intervalos infinitos

$\langle a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

$[a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

$\langle -\infty; a\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$

$\langle -\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$

$\langle -\infty; +\infty\rangle = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

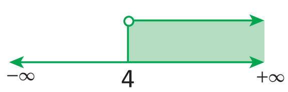
Ejemplo:

Si $x > 3$, en qué intervalo se encuentra $\frac{x+5}{2}$.

Resolución:

$x > 3$

$\frac{x+5}{2} > 4$



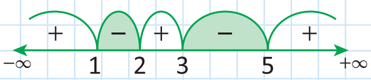
Problemas resueltos

1 Resuelve:

$(x-2)^3(x-3)(x-1)^5(x-5) \leq 0$

Resolución:

$(x-2)^3(x-3)(x-1)^5(x-5) \leq 0$



$\therefore$ CS = [1; 2] ∪ [3; 5]

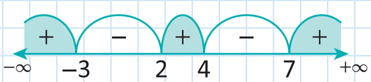
2 Resuelve:

$$\frac{(x-2)(x-4)}{(x+3)(x-7)} \geq 0$$

Resolución:

$\frac{(x-2)(x-4)}{(x+3)(x-7)} \geq 0$

$x \neq -3 \ \wedge \ x \neq 7$



$\therefore$ CS = $\langle -\infty, -3\rangle \cup [2; 4] \cup \langle 7; +\infty\rangle$

3 Halla el conjunto solución.

$-x+3 \leq 2x+6 \leq x+9$

Resolución:

$-x+3 \leq 2x+6 \ \wedge \ 2x+6 \leq x+9$

$-3 \leq 3x \qquad\qquad x \leq 3$

$-1 \leq x$

$\Rightarrow \ -1 \leq x \leq 3$

$\therefore$ CS = [–1; 3]

4 Si $x \in [2; 4]$. Calcula el intervalo de $\frac{x-2}{2}$.

Resolución:

$2 \leq x \leq 4$

$1 \leq \frac{x}{2} \leq 2$

$0 \leq \frac{x}{2} - 1 \leq 1$

$0 \leq \frac{x-2}{2} \leq 1$

$\therefore \ \frac{x-2}{2} \in [0; 1]$

5 Calcula la suma de los números naturales que satisfacen la inecuación:

$7x^2 + 3 \leq 22x$

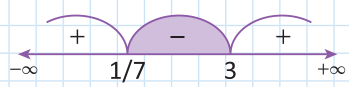
Resolución:

$7x^2 - 22x + 3 \leq 0$

$7x \qquad -1$

$x \qquad -3$

$(7x-1)(x-3) \leq 0$



$x \in [1/7; 3]$

Suma de números naturales: $1 + 2 + 3 = 6$

6 Indica el mayor valor entero de n que verifica la inecuación:

$$\frac{3n+2}{2} + 5 < \frac{4n-1}{3} - n$$

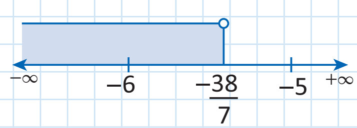
Resolución:

$\frac{3n+2}{2} + 5 < \frac{4n-1}{3} - n$

$9n + 36 < 2n - 2$

$7n < -38$

$n < -\frac{38}{7}$



$\therefore$ El mayor valor entero es –6.

7 Luego de resolver: $\sqrt{x+6} > x$. Se obtiene como conjunto solución $[a; b\rangle$, según esto calcula $a + b$.

Resolución:

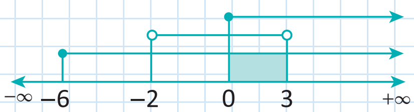
Tomamos dos casos posibles:

Caso 1:

$x \geq 0 \Rightarrow x + 6 > x^2 \ \wedge \ x + 6 \geq 0$

$x \geq 0 \ \wedge \ x^2 - x - 6 < 0 \ \wedge \ x \geq -6$

$(x - 3)(x + 2) < 0$

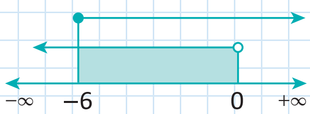


$x \in [0; 3\rangle$

Caso 2:

$x < 0 \ \Rightarrow \ x + 6 \geq 0$

$x < 0 \ \wedge \ x \geq -6$



$x \in [-6; 0\rangle$

$\Rightarrow x \in [-6; 0\rangle \ \cup \ [0; 3\rangle$

$x \in [-6; 3\rangle$

$\therefore a = -6 \wedge b = 3 \Rightarrow a + b = -3$

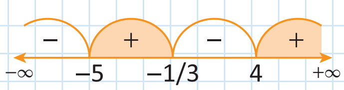
8 Resuelve:

$(3x + 1)^3(x - 2)^2(x + 5)^5(x - 2)^4(4 - x) \leq 0$

Resolución:

$(3x + 1)^3(x - 2)^6(x + 5)^5(x - 4) \geq 0$

$(3x + 1)^3(x + 5)^5(x - 4) \geq 0$, $x = 2$ es solución



$x \in [-5; -1/3] \cup [4; +\infty\rangle \cup \{2\}$

9 Resuelve:

$\sqrt{x^2 - 2x - 15} > x + 1$

Resolución:

$\sqrt{x^2 - 2x - 15} > x + 1 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x - 15 \geq 0 \wedge [x + 1 < 0 \vee (x + 1 \geq 0 \wedge x^2 - 2x - 15 > (x + 1)^2)]$

Se tiene:

• $x^2 - 2x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq 5$

• $x^2 - 2x - 15 \geq (x + 1)^2 \Leftrightarrow x < -4$

Reemplazando:

$(x \leq -3 \vee x \geq 5) \wedge [x < -1 \vee (x \geq -1 \wedge x < -4)]$

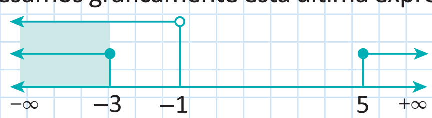
Luego:

$(\langle -\infty; -3] , [5; +\infty\rangle) \cap \{\langle -\infty; -1\rangle \cup ([-1; +\infty\rangle \cap \langle -\infty; -4\rangle)\}$

$= (\langle -\infty; -3\rangle , [5; +\infty\rangle) + \{\langle -\infty; -1\rangle , \varnothing\}$

$= (\langle -\infty; -3] , [5; +\infty\rangle) + \langle -\infty; -1\rangle$

Expresamos gráficamente esta última expresión:



$\therefore x \in \langle -\infty; 3]$

10 Si a es el mayor valor entero que satisface la desigualdad $\sqrt{x+2} > x$. El valor de: $\sqrt[a+1]{5-a}$

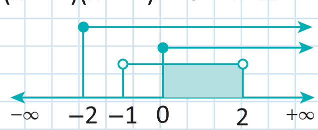
Resolución:

Universo de la ecuación: $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

Caso 1:

$x \geq 0 \Rightarrow x + 2 > x^2 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$

$x \geq 0 \ \wedge \ (x - 2)(x + 1) < 0 \wedge x \geq -2$



$\Rightarrow x \in [0; 2\rangle$

Caso 2:

$x < 0 \Rightarrow x + 2 \geq 0$

$x < 0 \wedge \ x \geq -2$

$x \in [-2; 0\rangle$

$\Rightarrow x \in [-2; 0\rangle \cup [0; 2\rangle$

$x \in [-2; 2\rangle$

El mayor valor entero de x es 1.

$\therefore \ \sqrt[a+1]{5-a} = \sqrt{4} = 2$

Actividades de razonamiento

1. Resuelve:

$\frac{x}{2} - \frac{x}{5} \leq 3$

A) $[10; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty; -10]$ C) $\langle 10; +\infty\rangle$
D) $\langle -\infty; 10\rangle$ E) $\langle -\infty; 10]$

2. Resuelve:

$\frac{x-2}{x+3} < \frac{x-1}{x-4}$

A) $\langle -3; 11/8\rangle \cup \langle 4;+\infty\rangle$ B) $\langle -3; 11/8] \cup \langle 4; +\infty\rangle$
C) $[-3; 11/8] \cup [4; +\infty\rangle$ D) $\langle -\infty; 11/8]$
E) $\langle -\infty; 11/8\rangle$

3. Resuelve e indica un intervalo:

$\frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} \geq 0$

A) $[3; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty; -3\rangle$ C) $\langle -2; -1\rangle$
D) $\langle 3; +\infty\rangle$ E) $\langle 1; 2\rangle$

4. Resuelve:

$x^2 + 5x + 4 > 2x(x+1)$

A) $\langle -1; 4]$ B) $\langle -1; 4\rangle$ C) $[-1; 4\rangle$
D) $\langle 4; +\infty\rangle$ E) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$

5. Resuelve:

$\frac{a^2(x-1)}{2} + b^2 \geq \frac{b^2(x-3)}{2} + 2a^2$

Siendo: $b > a > 0$

A) $\langle -\infty; -5]$ B) $[5; +\infty\rangle$ C) $\langle 5; +\infty\rangle$
D) $\langle -\infty; 5]$ E) $\langle -\infty; 5\rangle$

6. Resuelve:

$\frac{a^2(x-3)}{4} + b^2 > \frac{b^2(x-3)}{4} + a^2$

Siendo: $b > a > 0$

A) $\langle -\infty; -7]$ B) $\langle 7; +\infty\rangle$ C) $\langle -\infty; 7\rangle$
D) $\langle -\infty; -7\rangle$ E) $[7; +\infty\rangle$

7. Resuelve:

$(x+2)(x+3) + 4 \$ (x+5)(x+6) + 7$

A) $[-9/2; +\infty\rangle$ B) $\langle -9/2; +\infty\rangle$ C) $\langle -\infty; -9/2]$
D) $\langle -\infty; -9/2\rangle$ E) $\langle -9/2; 9/2\rangle$

8. Resuelve:

$\frac{x+1}{2} + \frac{x-2}{3} \geq \frac{x+3}{4} + \frac{x-4}{3}$

A) $\langle -\infty; 5/3\rangle$ B) $[-5/3; +\infty\rangle$ C) $\langle -\infty; -5/3]$
D) $\langle -5/3; +\infty\rangle$ E) $[5/3; +\infty\rangle$

9. Resuelve:

$(x + 2)(x + 1)^2 > x(x + 2)^2$

A) $\langle -2; +\infty \rangle$ B) $[-2; +\infty \rangle$ C) $\langle -\infty; -2 \rangle$
D) $\langle -\infty; 2 \rangle$ E) $\langle -2; 2 \rangle$

10. Resuelve:

$(x + 1)(x + 2)^2 \geq (x + 3)(x + 1)^2$

A) $\langle -1; +\infty \rangle$ B) $\langle -\infty; -1]$ C) $\langle -\infty; -1 \rangle$
D) $\langle -1; 1 \rangle$ E) $[-1; +\infty \rangle$

11. Resuelve:

$2x + 3 > \sqrt{4x^2 - 5x + 1}$

e indica el número de soluciones enteras menores que 7.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 7 E) 9

12. Resuelve:

$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

A) $\langle 3; +\infty \rangle$ B) $[3; +\infty \rangle$ C) $\langle -\infty, 3 \rangle$
D) $\langle -\infty; 3]$ E) $\varnothing$

13. Resuelve:

$(x + 1)^2(x - 2)(x^2 - x - 6) > 0$

A) $\mathbb{R} - \{-1\}$
B) $\varnothing$
C) $\langle -3; 2 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$
D) $\langle -2; 2 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$
E) $\langle -2; 2 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle - \{-1\}$

14. Resuelve:

$x + 1 < (x + 1)(4x - x^2 - 3)$

A) $x \in \langle -1; +\infty \rangle$ B) $x \in \langle -\infty; 0 \rangle$ C) $x \in \langle -\infty; -1 \rangle$
D) $x \in \langle 1; +\infty \rangle$ E) $x \in \langle 2; +\infty \rangle$

Claves

1. E	5. D	9. A	13. E
2. A	6. C	10. E	14. C
3. A	7. C	11. D	
4. B	8. B	12. B	

Reto



Determina el producto de los elementos del conjunto siguiente:

$M = \{x \in \mathbb{Z} / |x - 3| + |x^2| < |x^2 + 2| \wedge 3x^2 \geq 2x - 7\}$

Rpta.: 24

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si se sabe que: $-1 < x < 5$; entre qué valores varía: $J = 3x + 2$

A) $\langle 3; 7\rangle$ B) $\langle 3; 10\rangle$ C) $\langle -1; 17\rangle$
D) $\langle -2; 6\rangle$ E) $\langle 2; 5\rangle$

2. Si se sabe que: $x \in [-2; 3\rangle$ señala la variación de: $A = 6 - 2x$.

A) $\langle 0; 10]$ B) $\langle -1; 10\rangle$ C) $\langle -1; 1]$
D) $\langle 0; 5]$ E) $[0; 10]$

3. Sean los intervalos:
$P = [-6; 13]$; $Q = \langle -8; 5]$
Halla P – Q e indica la cantidad de números enteros que la verifica.

A) 1 B) 5 C) 7
D) 8 E) 6

4. Señala el valor máximo de:
$J = 7 - x^2$; $x \in \mathbb{R}$

A) x + 1 B) 0 C) 7
D) 1 E) 6

5. Resuelve:
$(2x + 1)^2 > 0$

A) $\langle -1; 1\rangle$ B) $\mathbb{R}$ C) $\langle 0; 2\rangle$
D) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$ E) $\langle -2; 2\rangle$

6. Resuelve: $(2x + 1)^2 \geq 0$

A) $\langle -\infty; 3\rangle$ B) $\mathbb{R}$ C) $\langle -1; +1\rangle$
D) $\langle -\infty; 0\rangle$ E) $\langle 0; +\infty\rangle$

7. Si: $(5x - 1) \in \langle 4; 9\rangle$, ¿a qué intervalo pertenece $\dfrac{1}{3x-2}$?

A) $\langle 1/2; 1\rangle$ B) $\langle 1/4; 2]$ C) $\langle 1/4; 1\rangle$
D) $\langle 1/4; 2\rangle$ E) $\langle 1/3; 2\rangle$

8. Resuelve: $x^2 - 11x + 28 > 0$

A) $\langle -1; 1\rangle$ B) $\langle -\infty; 4\rangle$ C) $\langle 7; +\infty\rangle$
D) $\langle 5; 8\rangle$ E) $\langle -\infty; 4\rangle \cup \langle 7; +\infty\rangle$

9. Resuelve: $x^2 + 2x - 8 < 0$

A) $\langle -1; 1\rangle$ B) $\langle -4; 2\rangle$ C) $\langle -4; 1\rangle$
D) $\langle -2; 2\rangle$ E) $\langle 1; 4\rangle$

10) Si: $\dfrac{1}{2x-1} \in [1; 8]$

Determina el menor valor de x.

A) 1 B) –7/16 C) 3 D) 0 E) –1

NIVEL 2

11) Si –1 es menor que **a** y **a** menor que cero, determina cuál de las alternativas es mayor.

A) a/2 B) a^2 C) a^4 D) 2a E) a^8

12) Resuelve el siguiente sistema:

$$3x - 4 \leq 5x + 2 \leq -x + 8$$

A) $1 \leq x \leq 3$ B) $-3 \leq x \leq 1$ C) $-3 \leq x \leq 2$
D) $x \leq -3$ E) $x \leq 1$

13) Halla el valor o conjunto de valores que satisfacen el sistema:

$$\frac{2x+3}{4} \leq 1 + \frac{x}{4}; \ \frac{x+1}{2} \leq x$$

A) {–1} B) $x \leq 1$ C) $[-1; +\infty\rangle$
D) {1} E) [–1; 1]

14) Resuelve: $-1 \leq -3 - 3x \leq 2$

Da como respuesta el intervalo donde se encuentra –6x.

A) $\left\langle -\frac{5}{3}; \frac{-2}{3} \right]$ B) $\left\langle \frac{2}{3}; \frac{5}{3} \right]$ C) $[4; 10\rangle$

D) $\langle -10; -4]$ E) $[-10; -4\rangle$

15) Si: $(-x + 3) \in [-6; 5\rangle \wedge (2x + 5) \in \langle a + 1; b + 13]$

Calcula: $a^{20} + b^2$

A) 0 B) 1 C) 10 D) 100 E) 125

16) Resuelve: $x^2 + x + 1 > 0$

A) $\langle -\infty; 0\rangle$ B) $\mathbb{R}$ C) $\langle -1; 1\rangle$
D) $\langle -\infty; 2\rangle$ E) $\langle 2; 4\rangle$

17) Halla el menor de los números M que cumple la siguiente condición:

$\forall x \in \mathbb{R}: 4x - x^2 - 12 \leq M$

A) 0 B) –2 C) –8 D) 1 E) 4

18) Resuelve: $\dfrac{5x-2}{x} - 4 < 0$

A) $\langle -2; 2\rangle$ B) $\langle 0; 2\rangle$ C) $\langle 1; 2\rangle$
D) $\langle -1; 1\rangle$ E) $\langle 0; 1\rangle$

19. Un comerciante adquirió cierto número de artículos de los que vendió 70 y le quedaron más de la mitad; al día siguiente le devolvieron 6, pero logró vender 36, de lo cual le quedaron menos de 42. ¿Cuántos artículos formaba el lote?

A) 140 B) 141 C) 139 D) 142 E) 139

20. Un carpintero hizo cierto número de mesas, vende 49 y le quedan por vender más de la mitad. Luego hace 9 mesas y vende 20, quedándole menos de 41 mesas por vender. ¿Cuántas mesas ha hecho sabiendo que inicialmente fabricó un número par de mesas?

A) 107 B) 102 C) 100 D) 109 E) 103

NIVEL 3

21. Señala el valor mínimo de:
$C = x^2 + 3;\ x \in \mathbb{R}$

A) 1 B) 0 C) 3 D) 5 E) 7

22. Señala el valor mínimo de:
$$M = x^2 + 4x + 8$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

23. Si x e y son números reales tales que: $x > 0 > y$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es correcta?

A) $(y-x)(x-y) < 0$ B) $x^2 + y^2 \geq 0$

C) $\dfrac{(y-x)}{y} > 0$ D) $x^2 - xy < 0$

E) $xy < 0$

24. Sabiendo que:
$x \in \langle 1; 3]$, señale la variación de: $C = 3x^2 - 1$.

A) $\langle 1; 26]$ B) $\langle -1; 13]$ C) $\langle 2; 26]$
D) $\langle 1; 13]$ E) $\langle 2; 13]$

25. Sabiendo que: $x \in [-3; -1\rangle$
Señala la variación de: $m = 3 - 2x^2$

A) $[-15; 3\rangle$ B) $[-12; 1\rangle$ C) $[-15; 1\rangle$
D) $\langle -15; 1]$ E) $\langle -12; 3]$

26. Sabiendo que:
$x \in [-1; 3\rangle$; señala la variación de: $A = \dfrac{2}{x^2 + 4}$

A) $\left[\dfrac{1}{13}; 2\right]$ B) $\left[\dfrac{1}{12}; 1\right]$ C) $\left[\dfrac{1}{13}; 1\right]$

D) $\left\langle \dfrac{2}{13}; \dfrac{1}{2}\right]$ E) $\left[\dfrac{3}{13}; 2\right]$

27) Resuelve:

$\sqrt{2x^2+x} \geq 1$

A) $\langle 0; 4]$
B) $\langle -\infty; -1]$
C) $[1/2; \infty\rangle$
D) $\langle -1; 1\rangle$
E) $\langle -\infty; -1] \cup \langle 1/2; \infty\rangle$

28) Resuelve:

$\frac{\sqrt{4x-1}}{x} < 2$

A) $[1/4; +\infty\rangle - \{1/2\}$
B) $[1/4; +\infty\rangle$
C) $\langle -1; 1\rangle$
D) $\left\langle \frac{1}{2}; 4\right\rangle$
E) $\langle 2; 4\rangle$

29) Resuelve:

$|2x-1| \leq \frac{x}{2}$

A) $\left[\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]$
B) $\langle -1; 1\rangle$
C) $\left\langle \frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right\rangle$
D) $\left[\frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right]$
E) $\langle 2; +\infty\rangle$

30) Se dispone de un número de monedas de oro comprendido entre 197 y 205. Esas monedas se reparten entre tres personas: A; B y C. B recibe 15 monedas más que C y A recibe el doble de lo que recibe B. ¿Cuántas monedas recibe C, sabiendo que es impar?

A) 33
B) 35
C) 36
D) 39
E) 41

31) Resuelve la inecuación siguiente:

$3(x^2 - 5x + 10) \leq x(x+4)$

Solo tener en cuenta las soluciones enteras, luego indica la suma de estas.

A) 23
B) 27
C) 26
D) 29
E) 31

Claves

NIVEL 1		NIVEL 2	NIVEL 3	
1. C	9. B	11. B	17. C	25. C
2. A	10. B	12. B	18. B	26. D
3. C		13. D	19. B	27. E
4. C		14. C	20. D	28. A
5. D		15. D	21. C	29. D
6. B		16. B	22. B	30. D
7. C			23. D	31. B
8. E			24. C	

Logaritmos

DEFINICIÓN

Sean los números reales b y N, si $b > 0$, $b \neq 1$ y $N > 0$, el número real x se denomina logaritmo del número real N en base b y se denota $\log_b N$, si y solo si $b^x = N$.

$$\log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N$$

Donde:
b: base del logaritmo
N: número de logaritmo
x: logaritmo de N en base b

Ejemplos:

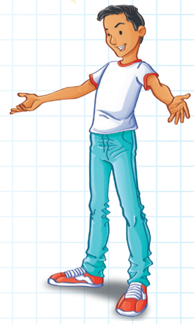
$\log_2 128 = 7 \Leftrightarrow 2^7 = 128$

$\log_3 729 = 6 \Leftrightarrow 3^6 = 729$

$\log_{\sqrt{2}} 64 = 12 \Leftrightarrow \sqrt{2}^{12} = 64$

Observación

$\log_7 1 = 0$
$\log_5 5 = 1$
En general:
$\log_b 1 = 0 \;\wedge\; \log_b b = 1$



IDENTIDAD FUNDAMENTAL

$$b^{\log_b N} = N$$

Ejemplos:

$9^{\log_9 5} = 5$

$(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\log_{(\sqrt{5}-\sqrt{3})} 2}$

$(n-7)^{\log_{n-7} 12} = 12; \; n > 7 \;$ y $\; n \neq 8$

TEOREMAS SOBRE LOGARITMOS

1. $\log_b AB = \log_b A + \log_b B$

2. $\log_b \dfrac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$

3. $\log_b A^n = n\log_b A$

4. $\log_{b^n} A^m = \dfrac{m}{n}\log_b A$

5. **Cambio de base**

$$\log_B A = \frac{\log_c A}{\log_c B}$$

6. **Regla de la cadena**

$$\log_A B \,.\, \log_B C \,.\, \log_C D \,.\, \log_D E = \log_A E$$

Recuerda

En el teorema 4:
Si $m = n$, $\log_{B^n} A^n = \log_B A$
Si $A = B$, $\log_{B^n} A^m = \dfrac{m}{n}$



Nota

$\log_B A = \dfrac{1}{\log_A B}$

SISTEMAS LOGARÍTMICOS

Los más importantes son:

Sistema decimal o de Briggs

Su base es el número diez.
Notación: $\log_{10}N = \log N$

Ejemplos:
$\log 10 = 1$
$\log 100 = 2$

Sistema natural o neperiano

Su base es el número e = 2,7182818...
Notación: $\log_e N = \ln N$

Ejemplos:
$\ln e = 1$
$\ln e^x = x$

Importante

$\text{colog}_b N = -\log_b N$

$\text{colog}_b N + \log_b N = 0$



COLOGARITMO

$$\text{colog}_b N = \log_b\left(\frac{1}{N}\right) = -\log_b N$$

Ejemplos:

$\text{colog}_5 7 = \log_5\left(\frac{1}{7}\right)$

$\text{colog}_3 81 = -\log_3 81 = -4$

Observación

$\text{antilog}_b(\log_b N) = N$

$\log_b(\text{antilog}_b N) = N$



ANTILOGARITMO

$$\text{antilog}_b N = b^N$$

Ejemplos:

$\text{antilog}_2 8 = 2^8 = 256$

$\text{antilog}_9(-1) = 9^{-1} = \frac{1}{9}$

Ejemplos de aplicación:

1. Resuelve:

$$(\log x)^{\left[\frac{\text{colog}(\text{anti}\log x)}{\log(\log x)}\right]} = 0,01$$

Resolución:

Tomamos logaritmos:

$$\log(\log x)^{\left[\frac{\text{colog}(\text{antilog}x)}{\log(\log x)}\right]} = \log 0,01$$

$$\left[\frac{\text{colog antilog}x}{\log(\log x)}\right].\log(\log x) = \log 10^{-2}$$

$$\text{colog antilog}x = -2$$
$$\log\text{antilog } x = 2$$
$$\therefore x = 2$$

2. Si: $\text{antilog}_b\text{colog}_b\log_b x = b^{-1}$
Calcula:
$M = \log_b(-\text{colog}_b\text{antilog}_x b)$

Resolución:
Del dato:
$\text{antilog}_b(-\log_b\log_b x) = b^{-1}$
$(\log_b x)^{-1} = b^{-1} \Rightarrow x = b^b$

Reemplazamos en M:
$M = \log_b[-(-\log_b\text{antilog}_b b)]$

$M = \log_b[\log_b(b^b)^b]$

$M = \log_b[\log_b b^{b^2}] \Rightarrow M = \log_b[b^2]$

$\therefore M = 2$

Problemas resueltos

1 Resuelve:

$\log\left[x^{[\log_x y][\log_y z][\log_z (x-3)]}\right] = \log 5$

Resolución:

$$\log\left[x^{\log_x (x-3)}\right] = \log 5$$
$$\log(x-3) = \log 5$$
$$x - 3 = 5$$
$$\therefore\ x = 8$$

2 Resuelve:

$$\log^2 x - 7\log x = -12$$

e indica el producto de soluciones.

Resolución:

$\log^2 x - 7\log x + 12 = 0$

$\log x \qquad -3$

$\log x \qquad -4$

$(\log x - 3)(\log x - 4) = 0$

$\log x = 3 \ \vee\ \log x = 4$

$x = 10^3 \ \vee\ x = 10^4$

$\therefore$ Producto de soluciones es 10^7.

3 Sabiendo que $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

Reduce: $\dfrac{f(a)+f(b)}{f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)}$

Resolución:

$$\frac{f(a)+f(b)}{f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)} = \frac{\log\left(\frac{1-a}{1+a}\right)+\log\left(\frac{1-b}{1+b}\right)}{\log\left(\dfrac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}\right)}$$

$$= \frac{\log\left(\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}\right)}{\log\left(\dfrac{\frac{1+ab-a-b}{1+ab}}{\frac{1+ab+a+b}{1+ab}}\right)} = \frac{\log\left(\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}\right)}{\log\left(\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}\right)} = 1$$

4 Si: $\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log\left(1-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = -3$

Halla n.

Resolución:

$$\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\ldots+\log\frac{n-1}{n} = -3$$

$$\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\right) = -3$$

$$\log\left(\frac{2}{n}\right) = -3 \Rightarrow \frac{2}{n} = 10^{-3} \qquad \therefore\ n = 2000$$

5 Si: $\log_3 5 = a \ \wedge\ \log_3 2 = b$.

Halla $\log_3(2,7)$ en función de a y b.

Resolución:

$$\log_3(2,7) = \log_3\left(\frac{27}{10}\right)$$
$$= \log_3 27 - \log_3 10$$
$$= \log_3 3^3 - (\log_3 5 + \log_3 2)$$
$$= 3\log_3 3 - a - b$$
$$\therefore\ \log_3(2,7) = 3 - a - b$$

6 Dada la siguiente igualdad:

$$\log(x+y) = \log x + \log y$$

Halla el valor de x para $y = x^2$.

Resolución:

$\log(x+y) = \log xy$

$x + y = xy$, como $y = x^2$, entonces:

$x + x^2 = x\,.\,x^2 \Rightarrow\ x(x^2 - x - 1) = 0$

$x = 0 \ \vee\ x^2 - x - 1 = 0$

Luego:

$x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)} \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$x = 0 \quad \vee \quad x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Como $x > 0$, entonces el valor de x es:

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

7 Si: $(a+b)^{-1}+(b-a)^{-1}=2(b)^{-1}$

Efectúa:

$$M=\frac{\log\left(\frac{a+b}{2b}\right)+\log\left(\frac{a^2+2b}{4b}\right)+\log\left(\frac{a^3+4b}{8b}\right)}{\log\left(\frac{a^6+3b}{6b}\right)}$$

Resolución:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b-a}=\frac{2}{b}$$

$$\frac{b-a+a+b}{(a+b)(b-a)}=\frac{2}{b}$$

$$\frac{2b}{b^2-a^2}=\frac{2}{b}$$

$$b^2=b^2-a^2$$

$$\Rightarrow a^2=0 \Rightarrow a=0$$

$$M=\frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)+\log\left(\frac{1}{2}\right)+\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore M=3$$

8 Resuelve:

$$N=\log_2 5^{\log_5 2^{\log_2 7^{\log_7 5^{\log_5 8}}}}$$

Resolución:

$$N=\log_2 5^{\log_5 2^{\log_2 7^{\log_7 5^{\log_5 8}}}}$$

$$N=\log_2 8$$

$$\therefore N=3$$

9 Si:

$\log(\log(\log x))=\log_x(\log_3 2 \cdot \log_2 3)$

Calcula el valor de: $\sqrt[10]{x}$

Resolución:

$$\log(\log(\log x))=\log_x 1$$

$$\underbrace{\log(\log(\log x))}_{1}=0$$

$$1 \Rightarrow \log x=10$$

$$x=10^{10}$$

$$\therefore \sqrt[10]{x}=\sqrt[10]{10^{10}}=10$$

10 Si x e y son números positivos y $\log x^3=a$; $\log y^3=b$, entonces el valor de:

$81\log\sqrt[27]{\frac{x}{y}}$ es:

Resolución:

$$a=\log x^3$$

$$\Rightarrow \log x=\frac{a}{3}$$

$$b=\log y^3$$

$$\Rightarrow \log y=\frac{b}{3}$$

Luego:

$$81\log\sqrt[27]{\frac{x}{y}}=81\log\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{27}}$$

$$=\frac{81}{27}(\log x-\log y)$$

$$=3\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{3}\right)$$

$$\therefore 81\log\sqrt[27]{\frac{x}{y}}=a-b$$

Actividades de razonamiento

1. Sea la función:
$F(x; y) = 2x - 6y$, halla x.
Si: $F(\log_5 x; \log_5 x) = -4$

A) 5 B) 1 C) $\sqrt{5}$
D) 25 E) $\sqrt{10}$

2. Si $\log_3 2 = \alpha$, calcula $\log_{12} 54$ en términos de α.

A) $\dfrac{(1+\alpha)}{1+2\alpha}$ B) $\dfrac{(3+\alpha)}{(1+2\alpha)}$ C) $\dfrac{(1+3\alpha)}{(1-\alpha)}$
D) $\dfrac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}$ E) $\dfrac{(1+2\alpha)}{(1+3\alpha)}$

3. Si: $\log x^3 = 6$, entonces $\log x\sqrt{x}$ es:

A) 1/3 B) 2 C) 3/4
D) 3 E) $\sqrt{6}$

4. Resuelve:
$\log_{\sqrt[3]{a}} x - \log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2$, si $a > 1$.

A) $\{-\sqrt{a}\}$ B) $\{\sqrt{a}; -\sqrt{a}\}$ C) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{a}}; \sqrt{a}\right\}$
D) $\{1; -\sqrt{a}\}$ E) $\{\sqrt{a}\}$

5. Si $\{\alpha\}$ es el conjunto solución de la ecuación:
$$\frac{\log(3x-5)}{\log(3x^2+25)} = \log_4 2$$
Calcula el valor de $\sqrt[3]{\alpha^2+2}$.

A) 2 B) 4 C) 3
D) 5 E) 6

6. Sabiendo que:
$$\underbrace{\log 5 + \log 25 + \log 125 + \ldots}_{t \text{ sumandos}} = 210\log 5$$
Calcula el valor de $\log t - 1$.

A) 1 B) log2 C) log5
D) 2 E) 5

7. Reduce:
$$\left\{4^{\frac{\log_3 7}{\log_3 2}}\right\}^{\log_{25} 125}$$

A) 243 B) 49 C) 343
D) 14 E) 256

8. Si: $10^x = 18 \;\wedge\; 10^y = 12$, calcula log6 en términos de x e y.

A) $x + y$ B) $\dfrac{x+y}{3}$ C) $\dfrac{x+y}{2}$
D) $\dfrac{x-y}{2}$ E) $2x + 2y$

9. Si: $m = \log_{27}256$ y $n = \log_3 16$

Entonces el valor de m en función de n es:

A) $m = n/3$ B) $m = \frac{4}{3}n$ C) $m = 3n$
D) $m = 2n/3$ E) $m = 2n$

10. Si: $3^n = a$ y $27^n = b$
¿Cuál es el valor de $\log_b a$?

A) 1/3 B) 1/2 C) n/2
D) n/3 E) 3

11. Dados los números:

$m = \log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 6 + 1$

$n = \log_y 3 + \log_y 5 + \log_y 7 + 1$

Si: $\frac{x^m}{y^n} = \frac{2}{5}$, calcula el valor de $\frac{y}{x}$.

A) 5/8 B) 8/7 C) 5/4
D) 4/5 E) 5

12. Si: $\text{antilog}_3 x$; $\text{antilog}_9 y$; $\text{antilog}_{27} z$ están en progresión aritmética.
Calcula: $(x - y)$, si $y - z = 2$.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

13. Si: x e y son números positivos, tales que:
$\log_3 x^2 = a$, $\log_3 y^2 = b$; entonces el valor de:

$20\log_9 \sqrt[10]{\frac{x}{y}}$ es:

A) $a - b$ B) $\frac{(a-b)}{4}$ C) $\frac{(a+b)}{2}$

D) $2(a - b)$ E) $\frac{(a-b)}{2}$

14. Si:
$\log_3 a = \frac{1}{2}$ y $\log_3 \frac{\sqrt{ab}}{9} = -\frac{3}{2}$

Halla el valor de b.

A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{6}$ E) 1

Claves

1. A	5. C	9. D	13. E
2. B	6. B	10. A	14. A
3. D	7. C	11. B	
4. E	8. B	12. B	

Reto



Simplifica:

$$\frac{\left[\log_4(0,5) + \log_3(0,\hat{3})\right]\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}}4}}{\left(\log_{ab} a + \log_{ab} bc - \log_{ab} c\right)}$$

Rpta.: –6

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Halla x en:

$\log_{81}x = \frac{3}{4}$

A) 21 B) 9 C) 3 D) 81 E) 27

2. Halla x en:

$\log_x 64 = \frac{3}{2}$

A) 16 B) 8 C) 4 D) 32 E) 1

3. Halla x en:

$\log_{125}25 = x$

A) 2 B) 1/2 C) 2/3 D) 3/4 E) 3

4. Halla x si:

$\log_5 x = \log_5 15 + \log_5 20 - \log_5 12$

A) 4 B) 25 C) 16 D) 8 E) 18

5. Halla E si:

$E = \log 30 - \log 120 + \log 400$

A) 2 B) 3 C) 0 D) 1 E) 5

6. Halla x en:

$\log_4 2 + \log_4(3x + 2) = 3$

A) 9 B) 10 C) 8 D) 4 E) 5

7. Halla E en:

$E = \log_{12}36 + \log_{12}35 - \log_{12}15 + \log_{12}48 - \log_{12}28$

A) 0 B) 3 C) 4 D) 12 E) 2

8. Resuelve:

$\frac{1}{2}\log x^3 + \log_{100}x = 2$

A) 5 B) 6 C) 10 D) 12 E) 8

NIVEL 2

9. Resuelve:

$\log_{(2x-1)}(4x^2 - 19) = 2$

A) 7 B) 6 C) 3 D) 5 E) 8

10. Resuelve:

$\log_2 x + \log_4 x^2 = 4$

A) 4 B) 6 C) 2 D) 5 E) 8

11. Resuelve:
$\log_{(5x-7)}27 = 3$, $x \in \mathbb{N}$.

A) 4 B) 2 C) 3 D) 0 E) 1

12. Halla x si:
$$\frac{\log(x-7)}{\log(x-1)} = \frac{1}{2}$$

A) {5; 10} B) 5 C) 12 D) 6 E) 10

13. Halla x si:
$$\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$$

A) 3 B) 0 C) $\frac{12}{5}$
D) 4 E) $\left\{0; \frac{12}{5}\right\}$

14. Halla x en:
$\log_{25}9 = \log_5(x^2 + 2x)$

A) {1; –3} B) 1 C) 3 D) 2 E) –3

15. Halla x en:
$2\log x = \log(10 - 3x)$

A) 1 B) –5 C) 2
D) 3 E) {–5; 2}

16. Halla el valor de A:
$$A = \operatorname{colog}_5\left(\frac{1}{25}\right) + \operatorname{antilog}_3 2$$

A) 8 B) 11 C) 13 D) 9 E) 10

NIVEL 3

17. Efectúa:
$\log_5 a \, . \, \log_3 8 \, . \, \log_8 5 \, . \, \log_a x = 5$

A) 27 B) 7 C) 243 D) 8 E) 49

18. Halla x en:
$(\log_a x)(\log_2 a) = \log_{x^2} x^4$

A) a B) 2 C) 4 D) a^2 E) a/2

19. Halla a en:
$e^{a+b} = 18$ y $e^{a-b} = 2$.

A) 1 B) ln6 C) 12
D) ln2 E) ln18

20. Si: $5^x = 2 \wedge 7^y = 3$
Reduce la expresión siguiente:
$$\log\left(\frac{x}{\log_5 4}\right) + \log\left(\frac{y}{\log_7 9}\right)$$

A) –2log2 B) log4 C) log (1/2)
D) –log2 E) –2log3

21. Si: $\log 2 = a$
$\log 3 = b$
Halla: $\log 60$

A) $\dfrac{(a+b)}{2}$　B) $a \cdot b$　C) $a + b + 1$
D) ab　E) $a - b$

22. Reduce:
$\log_n \left[\log_n \sqrt[n-1]{n^{-n}\sqrt{n}}\right]$, siendo $n > 1$.

A) 7　B) 2　C) 3　D) 5　E) -1

23. Resuelve:
$$\left[\frac{b}{\log_x a}\right]^{\log_a x} = b^{2b}$$

A) a^b　B) ab　C) $a - b$
D) $b + a$　E) $2(a + b)$

24. Dado el siguiente sistema:
$$\begin{cases} a^{\log(a\,.\,x)} = b^{\log(by)} \\ x^{\log x} = y^{\log y} \end{cases} ;\ (x \neq y,\ a > 0,\ b > 0)$$

Determina el valor de $x - y$:

A) $a + b$　B) $a - b$　C) $a - b$
D) $\dfrac{b^2 - a^2}{ab}$　E) $a^2 + b^2$

25. Si: $m; n \in \mathbb{R}^+ \wedge \log_{mn} m = 3$, calcula el valor de:
$$\log_{mn}\left(\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{m^7}}\right)$$

A) 2　B) -4　C) 10
D) -10　E) 4

26. Resuelve:
$\log_{\sqrt{6}}(x^2 - 5x) > 2$

A) $\langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 6; +\infty\rangle$　B) $\langle 6; +\infty\rangle$
C) $\langle -\infty; -1\rangle$　D) $\langle -\infty; -1\rangle$, $\langle 5; +\infty\rangle$
E) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 6; +\infty\rangle$

Claves

NIVEL 1	8. C	15. E	22. E
1. E	NIVEL 2	16. B	23. A
2. A	9. D	NIVEL 3	24. D
3. C	10. A	17. C	25. D
4. B	11. B	18. C	26. E
5. A	12. E	19. B	
6. B	13. C	20. A	
7. E	14. A	21. C	

Cerillos

DEFINICIÓN PREVIA

Los juegos con cerillos, constituyen un conjunto de actividades que desarrollan la imaginación espacial además de desarrollar la atención y la concentración.

Los cerillos se convierten en un medio para entretenernos usando nuestra imaginación.

Las actividades desarrolladas y propuestas consisten en solucionar problemas a través de desplazar o quitar fósforos para obtener o desarmar figuras que conllevan a la construcción de conceptos geométricos, así como también para resolver operaciones aritméticas y problemas diversos.

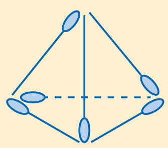
Atención

Hay problemas de cerillos que no tienen solución en el plano por lo que hay que salirse de él y pasar a tres dimensiones.

Veamos la siguiente aplicación.

Construir con seis cerillos cuatro triángulos equiláteros:

Respuesta:
En tres dimensiones dibujamos una pirámide de base triangular:

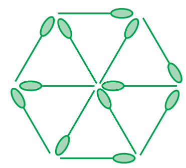




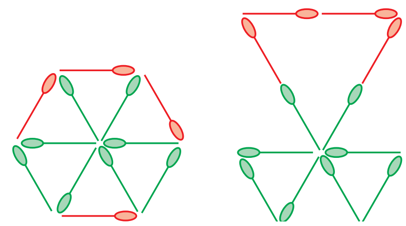
Fósforos que se trasladan o desplazan

Veamos las siguientes aplicaciones:

En el siguiente hexágono, formado seis triángulos equiláteros, cambia de lugar cuatro de los fósforos para formar tres triángulos equiláteros.

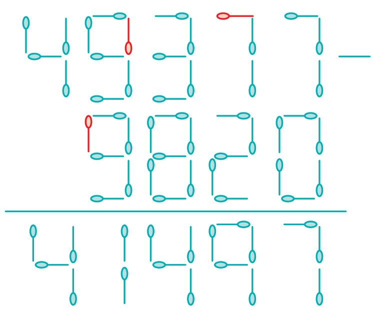


Resolución:
Movemos los cerillos resaltados con rojo para obtener tres triángulos equiláteros.

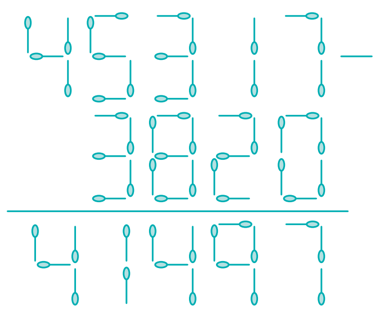


Fósforos que se quitan o agregan

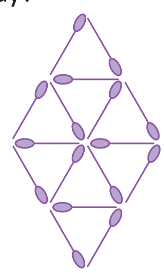
1. Quita tres palitos de fósforo para que la resta sea correcta:



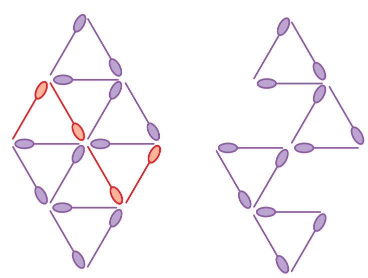
Resolución:
Los palitos que están con rojo son los que vamos a eliminar para obtener la resta correcta.



2. ¿Cuál es la mínima cantidad de cerillos que hay que quitar para que queden cuatro triángulos equiláteros de los ocho que hay?

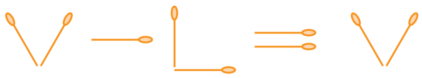


Resolución:
La mínima cantidad es 4 cerillos y son los que están de rojo, entonces queda:



Problemas resueltos

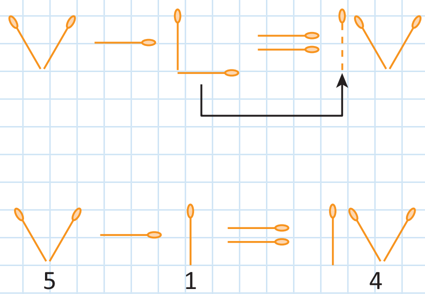
1 ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para que la igualdad sea correcta?



Resolución:

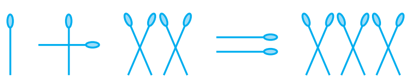
Del gráfico se observa que:
5 – 50 = 5 lo cual es incorrecto.

El movimiento será de la siguiente manera:



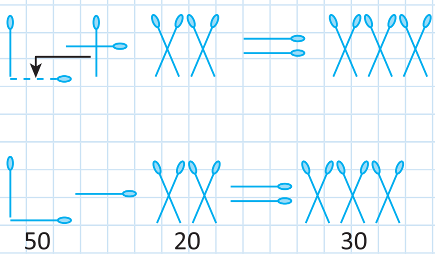
∴ Se debe mover 1 palito.

2 ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para obtener una verdadera igualdad?



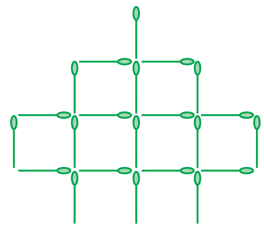
Resolución:

Movemos el cerillo del signo más.



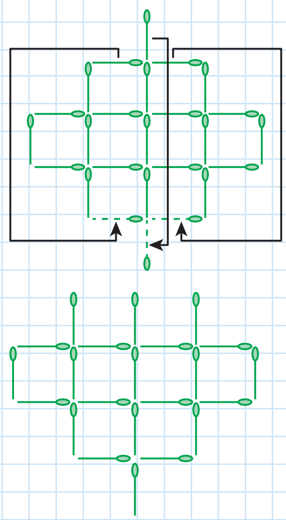
∴ Se debe mover 1 palito.

3 ¿Cuál es el menor número de palitos que se deben mover para que la nave cambie de dirección?



Resolución:

Hacemos los siguientes movimientos:



∴ Se deben mover 3 palitos.

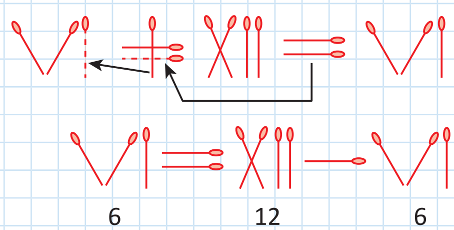
4 ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para encontrar una verdadera igualdad?



Resolución:

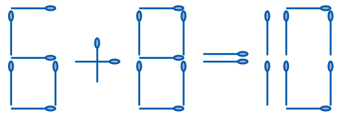
Se observa que: 5 + 12 = 6, lo cual es incorrecto.

Realizamos los siguientes movimientos:



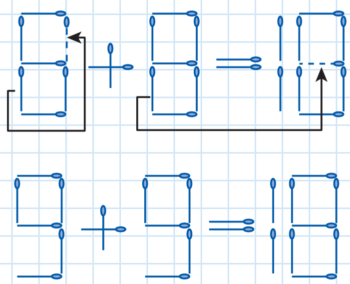
∴ Se deben mover 2 palitos.

5 ¿Cuántos palitos hay que mover como mínimo para que la expresión incorrecta se convierta en una igualdad verdadera?



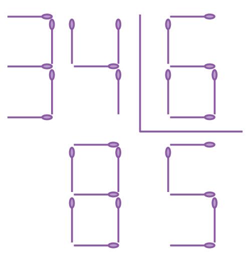
Resolución:

La expresión no es correcta, conseguiremos una verdadera igualdad realizando los siguientes movimientos:



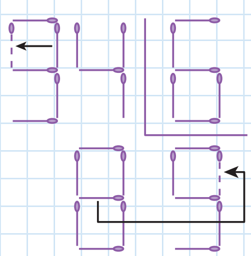
∴ Se deben mover 2 palitos.

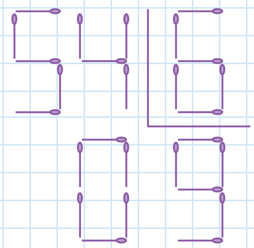
6 ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para que la operación sea correcta?



Resolución:

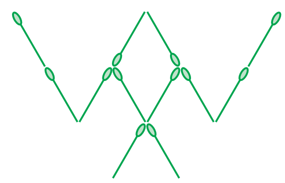
La división es incorrecta, debemos realizar los siguientes movimientos:





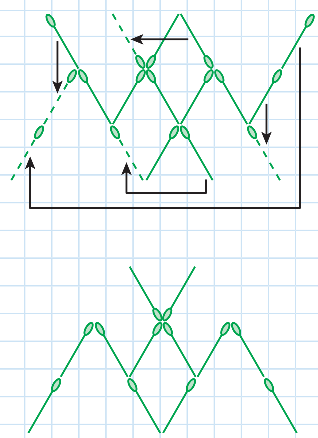
∴ Se deben mover 2 cerillos.

7 La figura muestra una rana formada por cerillos. ¿Cuántos cerillos es necesario mover, como mínimo, para que la rana mire en sentido contrario?



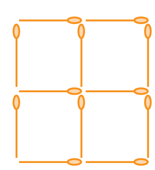
Resolución:

El mínimo número de cerillos a mover es 5, de la siguiente manera.



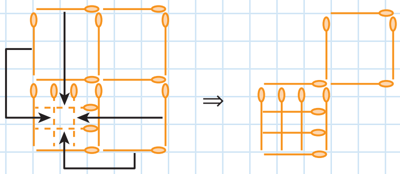
∴ Es necesario mover 5 palitos.

8 ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo, para obtener 15 cuadrados?



Resolución:

La única forma de obtener 15 cuadrados es generando otros más pequeños de la siguiente manera:



Finalmente se pueden contar en total 15 cuadrados.

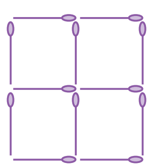
$\therefore$ Se deben mover 4 cerillos.

9 El gráfico que se muestra está formado por 12 cerillos, calcula $x + y + z$.
Sabiendo que:

x: es la menor cantidad de cerillos que se mueven, de tal manera que queden 3 cuadrados.

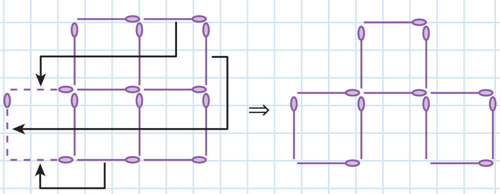
y: es la menor cantidad de cerillos que se mueven, de tal manera que queden 7 cuadrados.

z: es la menor cantidad de cerillos que se mueven de tal manera que queden 10 cuadrados.



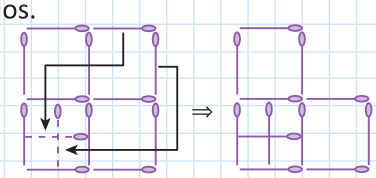
Resolución:

Para que queden 3 cuadrados se deben mover 3 cerillos.



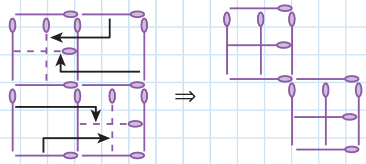
Luego: $x = 3$

Para que queden 7 cuadrados se deben mover 2 cerillos.



Entonces: $y = 2$

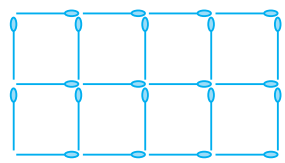
Para que queden 10 cuadrados se deben mover 4 cerillos.



Finalmente: $z = 4$

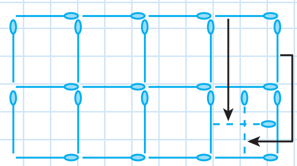
$\therefore x + y + z = 3 + 2 + 4 = 9$

10 En la figura que se muestra se observan 22 palitos del mismo tamaño y forma. ¿Cuál es el mínimo número de palitos que se deben cambiar de posición para obtener 13 cuadrados?

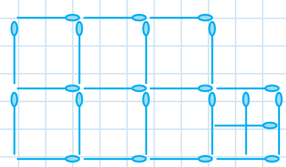


Resolución:

Al igual que en el problema anterior debemos formar cuadrados más pequeños.



Luego se tiene:

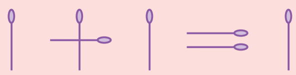


Finalmente se pueden contar 13 cuadrados en total.

$\therefore$ Se deben mover 2 cerillos.

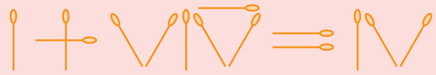
Actividades de razonamiento

1. ¿Cuál es la mínima cantidad de cerillos que se deben mover para que la igualdad resulte verdadera?



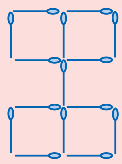
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

2. ¿Cuántos cerillos como mínimo se deben mover para obtener una verdadera igualdad?



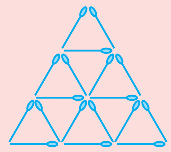
A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

3. ¿Cuál es la menor cantidad de cerillos que se deben mover para obtener 5 cuadrados del mismo tamaño?



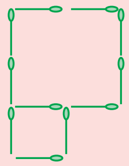
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

4. ¿Cuántos cerillos como mínimo se deben mover para que el triángulo que se muestra en la figura cambie de posición?



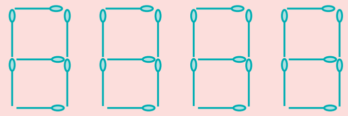
A) 3 B) 4 C) 6
D) 2 E) 1

5. ¿Cuántos cerillos como mínimo se deben cambiar de lugar para obtener 3 cuadrados?



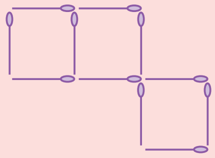
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. ¿Cuántos cerillos como mínimo se deben retirar para dejar solo ocho?



A) 5 B) 7 C) 9
D) 10 E) 8

7. ¿Cuántos cerillos se deben agregar como mínimo para obtener exactamente 8 cuadrados?

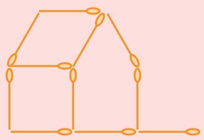


A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

8. ¿Con cuántos cerillos como mínimo se pueden formar dos cuadrados, ocho triángulos y una estrella de ocho puntas? Los cerillos pueden superponerse, pero no doblarse.

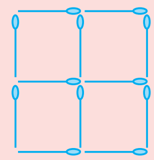
A) 7 B) 10 C) 12
D) 9 E) 8

9. ¿Cuál es la mínima cantidad de cerillos que se deben mover para que la casa cambie de posición?



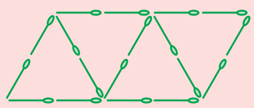
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

10. ¿Cuál es el mínimo número de cerillos que se deben mover para obtener 10 cuadrados?



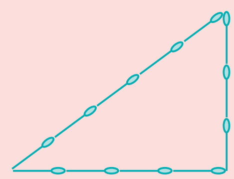
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

11. ¿Cuántos cerillos como mínimo se deben mover para formar 4 triángulos iguales y 3 rombos?



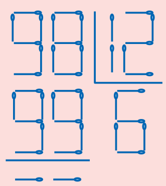
A) 3 B) 5 C) 4
D) 6 E) 7

12. ¿Cuántos cerillos se deben mover para obtener un área equivalente al área de 3 cuadraditos?



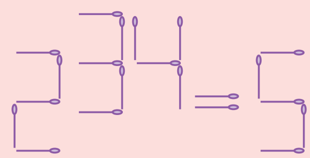
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

13. ¿Cuál es el menor número de cerillos que debemos mover para que la división sea exacta y correcta?



A) 1 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

14. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que resulte una igualdad verdadera?



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

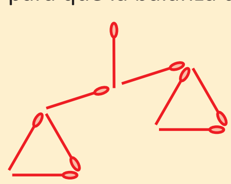
Claves

1. A	5. C	9. A	13. E
2. E	6. B	10. B	14. C
3. B	7. D	11. C	
4. C	8. E	12. D	

Reto



¿Cuál es el mínimo número de cerillos que se deben mover para que la balanza quede en equilibrio?

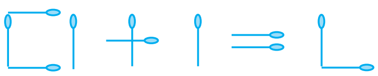


Rpta.: 5

Refuerza practicando

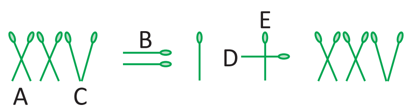
NIVEL 1

1. En el siguiente gráfico, ¿cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la igualdad sea correcta?



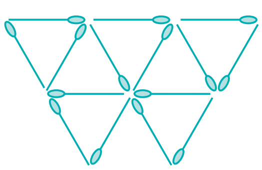
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. ¿Cuál de los cerillos debe ser cambiado de posición para obtener una igualdad?



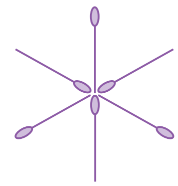
A) A B) B C) C D) D E) E

3. En el gráfico se cuentan 9 triángulos equiláteros en total. ¿Cuántos cerillos se tienen que retirar como mínimo, para contar 3 triángulos exactamente?



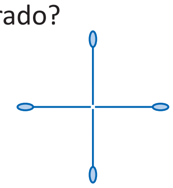
A) 7 B) 5 C) 3
D) 6 E) 4

4. En el siguiente gráfico, ¿cuántos cerillos se tienen que mover como mínimo, para obtener una corbata michi?



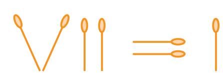
A) 2 B) 5 C) 1 D) 3 E) 4

5. ¿Cuántos cerillos como mínimo debo mover para obtener un cuadrado?



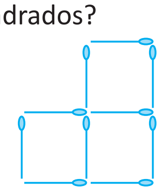
A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 1

6. ¿Cuántos cerillos debo mover para que la igualdad sea correcta?



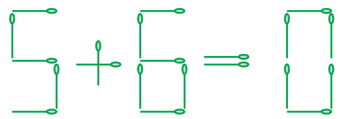
A) 5 B) 3 C) 1 D) 4 E) 2

7. ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para formar 6 cuadrados?



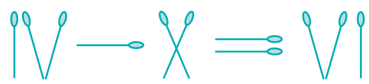
A) 7 B) 2 C) 4 D) 3 E) 8

8) ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para obtener una igualdad correcta?



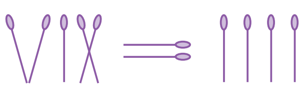
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9) ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para que la igualdad sea correcta?



A) 5 B) 1 C) 3 D) 4 E) 2

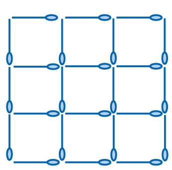
10) ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para obtener la igualdad?



A) 2 B) 4 C) 5 D) 1 E) 3

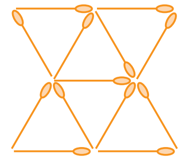
NIVEL 2

11) ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para obtener exactamente 11 cuadrados?



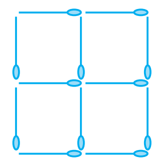
A) 7 B) 5 C) 4 D) 6 E) 2

12) ¿Cuántos cerillos deben retirar, como mínimo, para que en el gráfico no se observen triángulos?



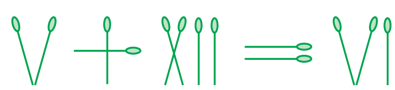
A) 8 B) 6 C) 4 D) 7 E) 5

13) ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para que solo haya tres cuadrados?



A) 4 B) 6 C) 7 D) 3 E) 5

14) ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo para que la operación sea correcta?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 4 E) 2

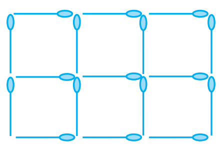
15) ¿Cuál es el máximo número de cuadrados que se pueden formar con 12 cerillos iguales, si la longitud del lado de los cuadrados debe ser la de un cerillo?

A) 10 B) 8 C) 7 D) 4 E) 6

16. ¿Cuántos cuadrados, cuyo lado sea un cerillo, se puede formar como máximo con 15 cerillos?

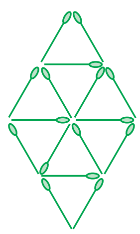
A) 11 B) 9 C) 7
D) 10 E) 8

17. ¿Cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, para que no quede algún cuadrado?



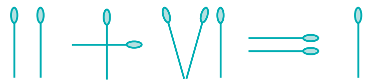
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

18. ¿Cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, para que no se observe ningún triángulo?



A) 6 B) 3 C) 4
D) 2 E) 5

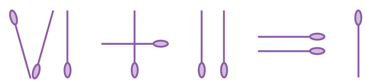
19. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la igualdad que se muestra en el gráfico sea correcta?



A) 1 B) 4 C) 5 D) 2 E) 3

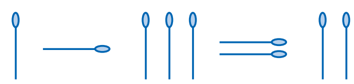
NIVEL 3

20. ¿Cuántos palitos hay que mover, como mínimo, para formar una expresión matemáticamente correcta?



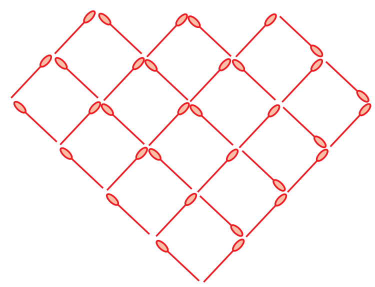
A) 5 B) 2 C) 6 D) 4 E) 3

21. ¿Cuántos palitos hay que mover, como mínimo, para obtener una igualdad correcta?



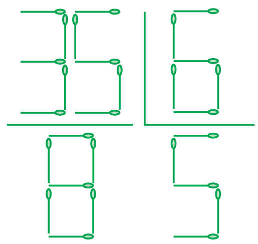
A) 5 B) 4 C) 3 D) 1 E) 2

22. ¿Cuántos cerillos deben retirarse como mínimo para que queden formados tres rombos de igual tamaño?



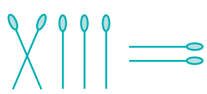
A) 16 B) 14 C) 10 D) 8 E) 6

23. ¿Cuántos cerillos, como mínimo, se deberán mover para que la operación sea correcta?



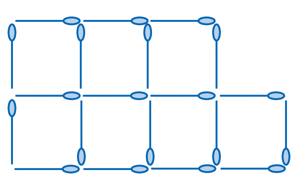
A) 5 B) 4 C) 3 D) 6 E) 2

24. ¿Cuántos cerillos hay que mover como mínimo para obtener una verdadera igualdad?



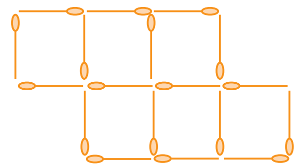
A) 1 B) 4 C) 2 D) 5 E) 3

25. ¿Cuántos cerillos se debe mover, como mínimo, para que queden exactamente 4 cuadrados del mismo tamaño?



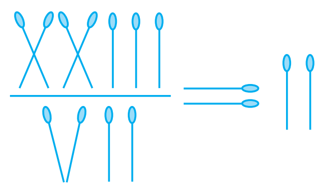
A) 2 B) 5 C) 4 D) 7 E) 6

26. ¿Cuántos cerillos se debe quitar, como mínimo, para que queden solamente cuatro cuadrados iguales?



A) 6 B) 4 C) 3 D) 5 E) 2

27. ¿Cuántos cerillos hay que mover, como mínimo, para obtener una igualdad? (No está permitido romper o doblar cerillos?



A) 5 B) 3 C) 1 D) 4 E) 2

Claves

NIVEL 1
1. B
2. E
3. C
4. A
5. E
6. C
7. C
8. A
9. B
10. D

NIVEL 2
11. E
12. C
13. D
14. E
15. E
16. C
17. D
18. C
19. A

NIVEL 3
20. B
21. D
22. B
23. E
24. C
25. C
26. E
27. C

UNIDAD 4



¿Cómo rellenar el plano de la manera más eficiente?

Rellenar es cubrir el plano con una determinada clase de figura geométrica, es decir cubrirla usando solo cuadrados o solo triángulos, etc.

Ahora, el rellenado del plano será "mínimo" (o "lo más eficiente") cuando a igualdad de área con cualquier otro "relleno" (figura geométrica) el perímetro total debe ser menor, es decir, si rellenamos primero el plano con una determinada figura geométrica de área "A" y luego rellenamos el plano con otra figura geométrica de área "A", la que tenga el menor perímetro total será la más eficiente. La pregunta será, ¿cuál de todas las figuras geométricas me permitirá rellenar el plano de la manera más eficiente?

En la actualidad se sabe que el rellenado mínimo se consigue con hexágonos regulares. Parece que esta cuestión proviene del siglo I a. C., en el que Marco Terencio Varrón habla sobre los hexágonos de los panales de abejas en un libro suyo de agricultura. Pero en realidad el problema ha pasado a la historia relacionado con Pappus de Alenjandría, que lo cita en su libro V (unos 400 años después), como la conjetura del panal.

Y eso fue una conjetura durante muchísimos años; nadie pudo demostrarla hasta el siglo XX. En 1943, L. Fejes Tóth pueba la conjetura del panal, pero considerando como hipótesis inicial que las celdas son polígonos convexos. Y la cosa se mantuvo así unos 50 años más. En 1999, Thomas Hales publica una demostración general de la conjetura del panal en su trabajo The honeycomb conjeture, en el que prueba que, efectivamente, el hexágono regular es la figura más eficiente.

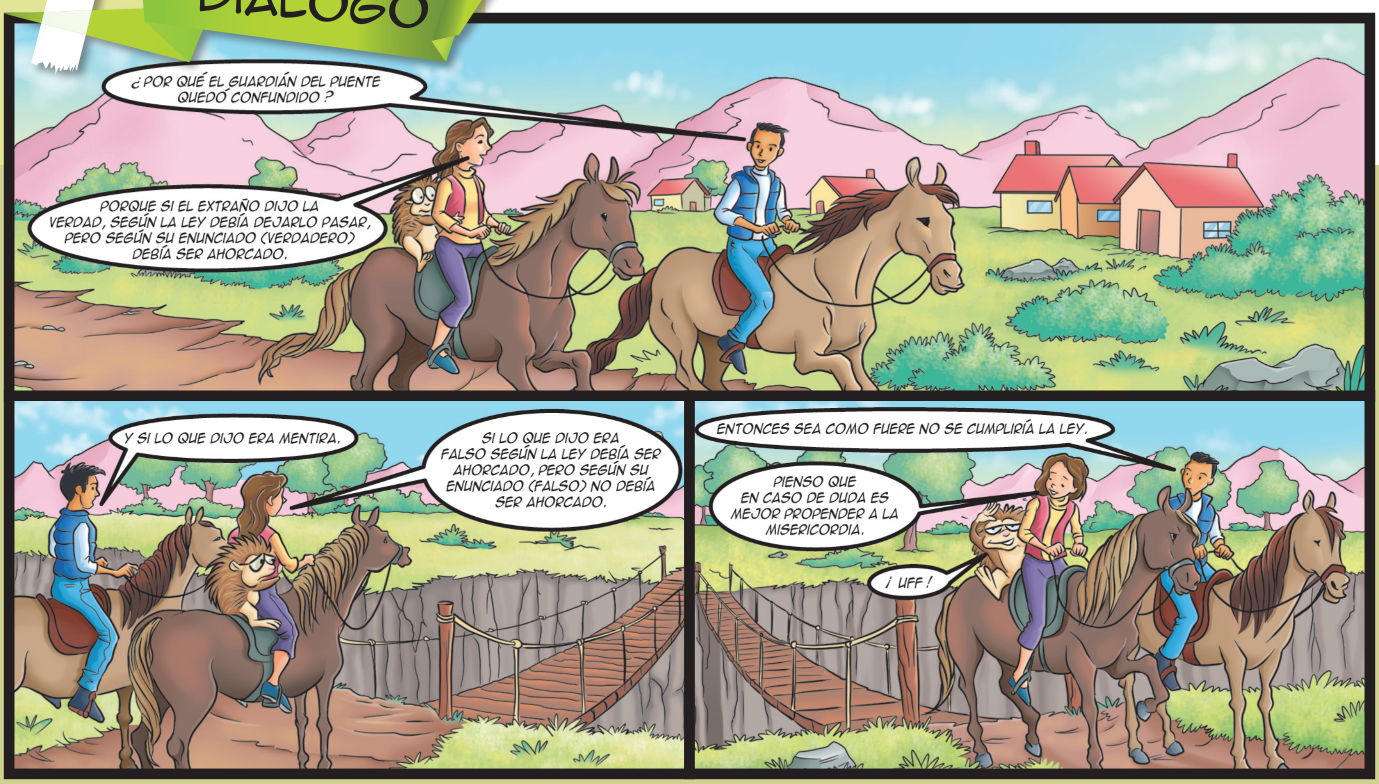
Matemática recreativa

Paradoja de Sancho Panza

Esta curiosa paradoja aparece en el capítulo I del libro segundo del Quijote. La paradoja consiste en lo siguiente: había un guardián que a cada viajero le preguntaba para qué iba a cruzar el puente. Si el viajero respondía la verdad, el guardián lo dejaba pasar sin problema. Sin embargo, si el visitante mentía (digamos que el guardián tenía un detector de mentiras infalible), sería ahorcado en el acto (ley impuesta por el rey). Todo iba bien, pero un día llegó un extraño. Cuando el guardián le preguntó para qué cruzaba el puente, el visitante solo le respondió: "Vengo aquí para ser ahorcado". El guardián del puente quedó confundido, pues no sabía qué debía hacer. ¿El extraño cruzó el puente o fue ahorcado?

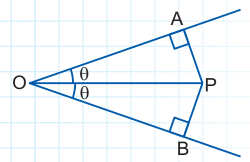


DIÁLOGO



Razonamiento geométrico

Nota

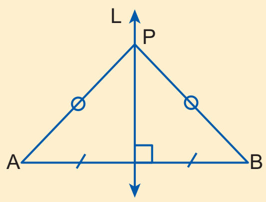


$\overline{OP}$: bisectriz

PA = PB ∧ OA = OB



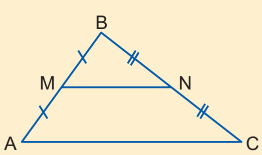
Recuerda



$\overleftrightarrow{L}$: mediatriz de $\overline{AB}$

PA = PB

Observación



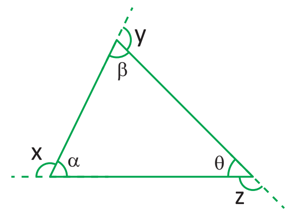
Si M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

$\Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AC}$ y $MN = \frac{AC}{2}$



TRIÁNGULOS

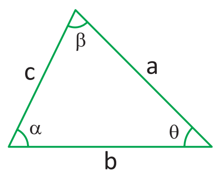
Propiedades básicas



$\alpha + \beta + \theta = 180°$

$x + y + z = 360°$

$x = \beta + \theta$
$y = \alpha + \theta$
$z = \alpha + \beta$

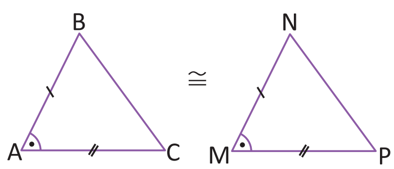


Si: $a > b > c$
$\Rightarrow \alpha > \beta > \theta$

Si: $a > b > c \Rightarrow$
$b - c < a < b + c$
$a - c < b < a + c$
$a - b < c < a + b$

Congruencia

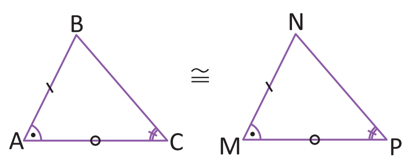
LAL (Lado-Ángulo-Lado)



$\overline{AB} \cong \overline{MN}$
$\angle BAC \cong \angle NMP$
$\overline{AC} \cong \overline{MP}$

$\Delta ABC \cong \Delta MNP$

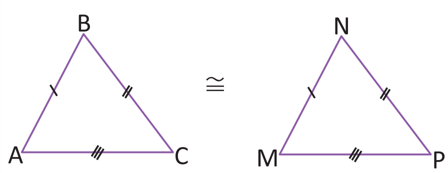
ALA (Ángulo-Lado-Ángulo)



$\angle BAC \cong \angle NMP$
$\overline{AC} \cong \overline{MP}$
$\angle ACB \cong \angle MPN$

$\Delta ABC \cong \Delta MNP$

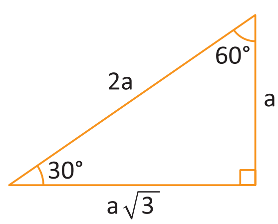
LLL (Lado-Lado-Lado)

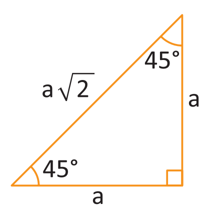


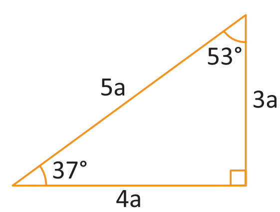
$\overline{AB} \cong \overline{MN}$
$\overline{BC} \cong \overline{NP}$
$\overline{AC} \cong \overline{MP}$

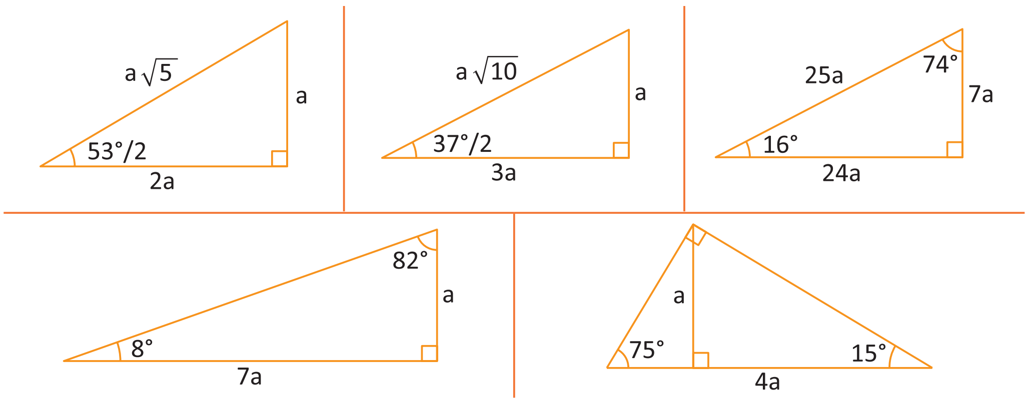
$\Delta ABC \cong \Delta MNP$

Triángulos rectángulos notables



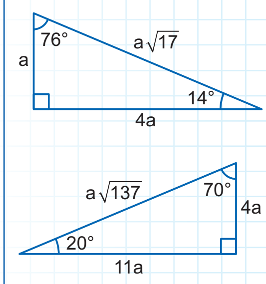






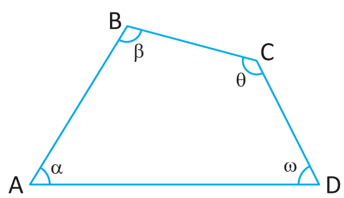
Nota

También:



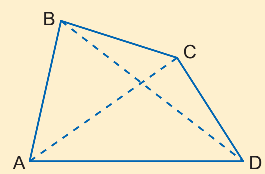
CUADRILÁTEROS

Propiedad básica



$$\alpha + \beta + \theta + \omega = 360°$$

Recuerda



Elementos:

Vértices: A; B; C; D

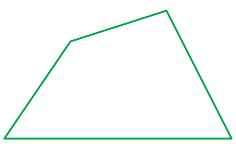
Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{AD}$

Diagonales: $\overline{AC}$; $\overline{BD}$

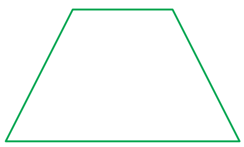


Clasificación

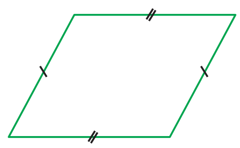
Trapezoide



Trapecio

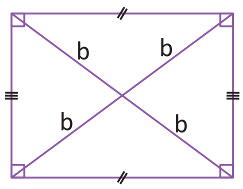


Paralelogramo

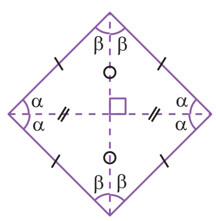


Tipos de paralelogramos

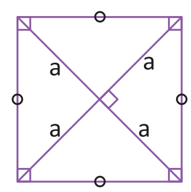
Rectángulo



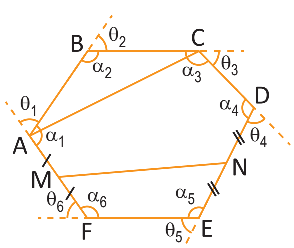
Rombo



Cuadrado



POLÍGONOS



Elementos:

Vértices: A; B; C; ...

Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; ...

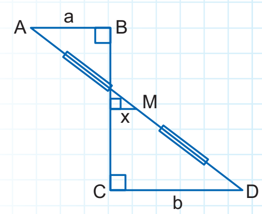
Ángulos interiores: $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; ...$

Ángulos exteriores: $\theta_1; \theta_2; \theta_3; ...$

Diagonales: $\overline{AC}$; $\overline{AD}$; $\overline{AE}$; ...

Diagonal media: $\overline{MN}$

Nota



Si: AM = MD ⇒ $x = \frac{b-a}{2}$

Propiedad

En todo polígono se cumple:

$$\text{n.° de vértices} = \text{n.° de lados} = \text{n.° de ángulos internos} = n$$

1. Suma de ángulos internos

$$S_i = 180°(n - 2)$$

2. Suma de ángulos externos

$$S_e = 360°$$

3. Número de diagonales

$$\text{n.° total de diagonales} = \frac{n(n-3)}{2}$$

4. Número de diagonales medias

$$\text{n.° total de diagonales medias} = \frac{n(n-1)}{2}$$

5. Número de diagonales trazadas desde m vértices consecutivos

$$\text{n.° dvc} = m \,.\, n - \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Propiedades para polígonos regulares o equiángulos

1. Medida de un ángulo interior

$$m\angle i = \frac{180°(n-2)}{n}$$

2. Medida de un ángulo exterior

$$m\angle e = \frac{360°}{n}$$

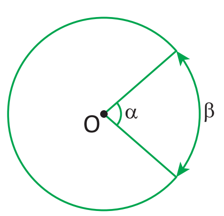
3. Medida del ángulo central

$$m\angle central = \frac{360°}{n}$$

CIRCUNFERENCIA

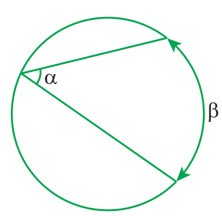
Ángulos en la circunferencia

Ángulo central



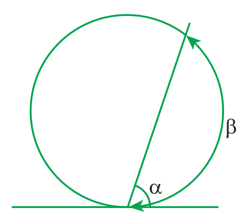
$$\alpha = \beta$$

Ángulo inscrito



$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

Ángulo semi-inscrito

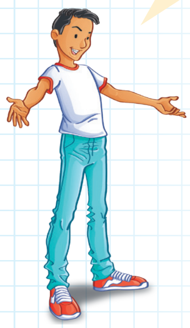


$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

Atención

Clasificación de polígonos

Triángulo	3 lados
Cuadrilátero	4 lados
Pentágono	5 lados
Hexágono	6 lados
Heptágono	7 lados
Octágono	8 lados
Nonágono	9 lados
Decágono	10 lados
Endecágono	11 lados
Dodecágono	12 lados
Pentadecágono	15 lados
Icoságono	20 lados



Nota

n.° diagonales desde un vértice $= n - 3$

n.° diagonales medias desde un punto medio $= n - 1$

Nota

Pentadecágono regular ($n = 15$)

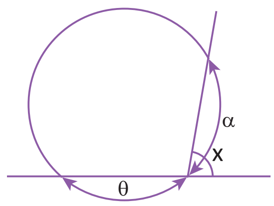
$m\angle int = \dfrac{180°(15-2)}{15}$

$= \dfrac{180°.13}{15} = 156°$

$m\angle ext. = \dfrac{360°}{15} = 24°$

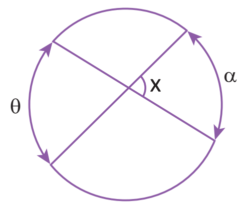
$m\angle central = \dfrac{360°}{15} = 24°$

Ángulo ex-inscrito



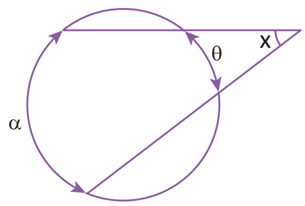
$$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

Ángulo interior

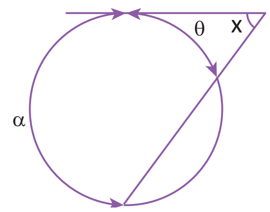


$$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

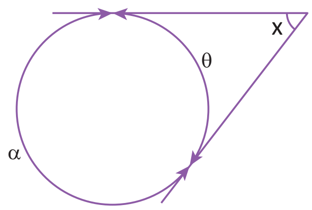
Ángulo exterior



$$x = \frac{\alpha - \theta}{2}$$



$$x = \frac{\alpha - \theta}{2}$$

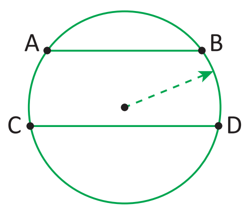


$$x = \frac{\alpha - \theta}{2}$$

Además: $x + \theta = 180°$

Propiedades

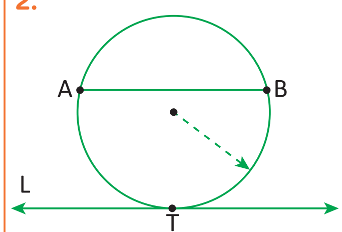
1.



Si: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD}$

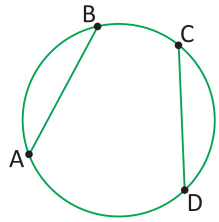
2.



Si: $\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{L}$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{AT} = m\overset{\frown}{BT}$

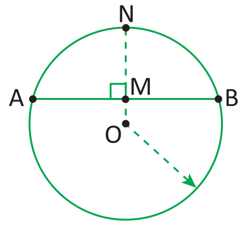
3.



Si: $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

$\Rightarrow AB = CD$

4.

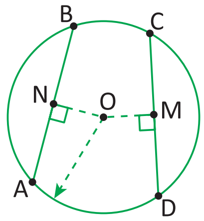


Si: $\overline{ON} \perp \overline{AB}$

$\Rightarrow AM = MB$

$m\overset{\frown}{AN} = m\overset{\frown}{NB}$

5.



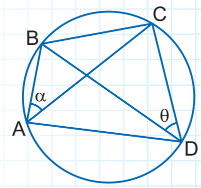
Si: $OM = ON$

$\Rightarrow AB = CD$

$m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

Nota

En todo cuadrilátero inscrito las diagonales determinan ángulos de igual medida con los lados.

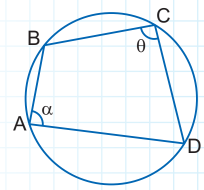


Si el ⏢ABCD está inscrito:

$\Rightarrow \alpha = \theta$

Nota

En todo cuadrilátero inscrito la suma de las medidas de dos ángulos opuestos es igual a 180°.

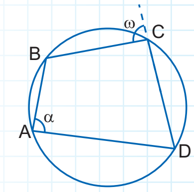


Si el ⏢ABCD está inscrito:

$\Rightarrow \alpha + \theta = 180°$

Nota

En todo cuadrilátero inscrito un ángulo interior tiene igual medida que un ángulo exterior opuesto.

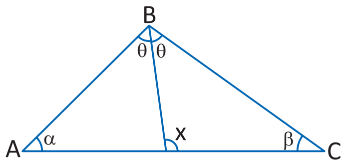


Si el ⏢ABCD está inscrito:

$\Rightarrow \alpha = \omega$

Problemas resueltos

1 Si $\alpha - \beta = 40°$. Calcula x.



Resolución:

Por suma de ángulos internos:

$x + \theta + \beta = 180°$ ...(I)

Por ángulo exterior:

$x = \alpha + \theta$ ...(II)

Sumando (I) y (II):

$2x + \theta + \beta = 180° + \alpha + \theta$

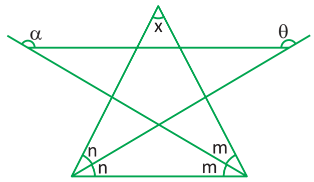
$2x = 180° + \underbrace{\alpha - \beta}$

$2x = 180° + 40°$

$2x = 220°$

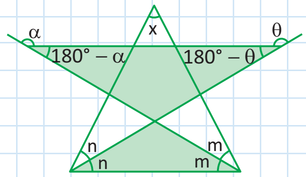
$\therefore\ x = 110°$

2 Calcula x, si $\alpha + \theta = 280°$.



Resolución:

Calculamos el suplemento de α y θ, el gráfico queda de la siguiente manera:



Aplicando propiedad en la figura sombreada:

$180° - \alpha + 180° - \theta = m + n$

$360° - (\alpha + \theta) = m + n$

$360° - 280° = m + n$

$\therefore m + n = 80°$

Por suma de ángulos internos:

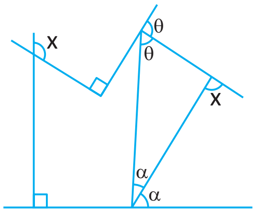
$2m + 2n + x = 180°$

$2(m + n) + x = 180°$

$2(80°) + x = 180°$

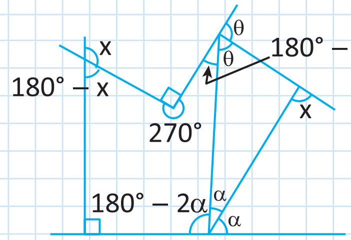
$\therefore\ x = 20°$

3 Calcula x.



Resolución:

Calculamos el suplemento de los ángulos 2θ, 2α, x, quedando el gráfico de la siguiente manera:



Por ángulo exterior:

$x = \alpha + \theta$

Por suma de ángulos interiores del pentágono sombreado.

$180° - x + 180° - 2\theta + 180° - 2\alpha + 90° + 270° = 540°$

$540° + 360° = 540° + 2\alpha + 2\theta + x$

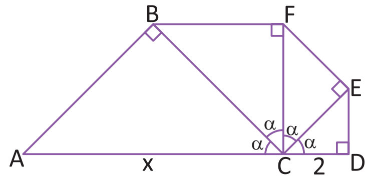
$360° = 2(\alpha + \theta) + x$

$360° = 2x + x$

$360° = 3x$

$\therefore\ x = 120°$

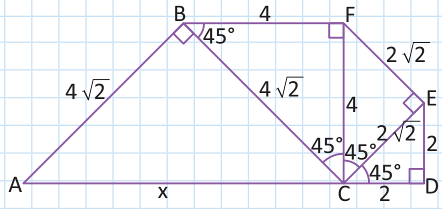
4 En el gráfico calcula x.



Resolución:

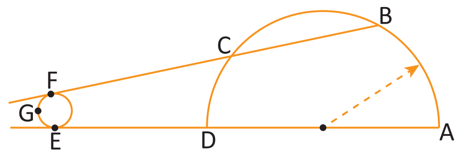
Del gráfico: $4\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$

Entonces, el gráfico queda de la siguiente manera:



- $CD = DE = 2 \Rightarrow CE = 2\sqrt{2}$
- $CE = EF = 2\sqrt{2} \Rightarrow CF = 4$
- $CF = BF = 4 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$
- $AB = BC = 4\sqrt{2} \Rightarrow x = (4\sqrt{2})\sqrt{2} = 8$

5 Calcula $m\overset{\frown}{FGE}$, si $m\overset{\frown}{DC} = 30°$ y $m\overset{\frown}{CB} = 80°$, además F y E son puntos de tangencia.



Resolución:

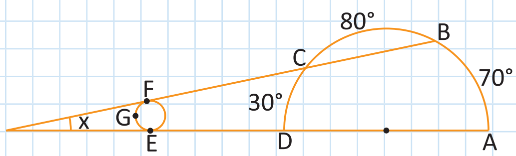
Se sabe que:

$m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{CD} = 180°$

$m\overset{\frown}{AB} + 80° + 30° = 180°$

$m\overset{\frown}{AB} = 70°$

El gráfico queda de la siguiente manera



Por ángulo exterior:

$$x = \frac{m\overset{\frown}{AB} - m\overset{\frown}{CD}}{2}$$

$$x = \frac{70° - 30°}{2}$$

$$x = 20°$$

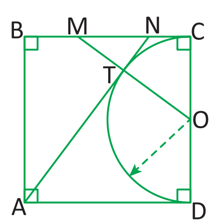
Por propiedad:

$x + m\overset{\frown}{FGE} = 180°$

$20° + m\overset{\frown}{FGE} = 180°$

$m\overset{\frown}{FGE} = 160°$

6 El lado del cuadrado mide 12 cm. Calcula MN, si T es punto de tangencia.



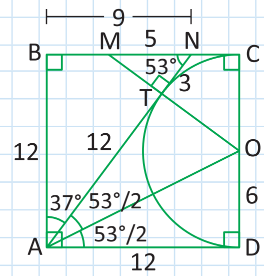
Resolución:

El lado del cuadrado AD = 12 cm ⇒ OD = 6 cm

En el triángulo ADO:

$m\angle OAD = 53°/2$

Entonces el gráfico queda de la siguiente manera:



El triángulo ABN es notable de 37° y 53°.

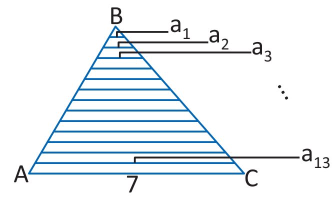
AB = 12 ∧ AN = 15

AT = 12 ⇒ TN = 3

El triángulo MTN es notable de 37° y 53°.

∴ MN = 5 cm.

7 Halla la suma de las medidas de los segmentos paralelos a $\overline{AC}$, si ellos dividen a $\overline{AB}$ en partes de longitudes iguales y AC = 7 cm.

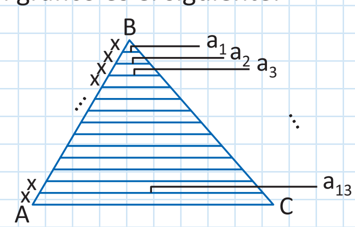


Resolución:

Aplicamos semejanza para hallar cada uno de los 13 segmentos paralelos a $\overline{AC}$.

Como $\overline{AB}$ se divide en partes de longitudes iguales, entonces cada parte mide x.

Luego el gráfico es el siguiente:



Aplicamos semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{14x} = \frac{a_1}{7} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x}{14x} = \frac{a_2}{7} \Rightarrow a_2 = 1$$

$$\frac{3x}{14x} = \frac{a_3}{7} \Rightarrow a_3 = \frac{3}{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

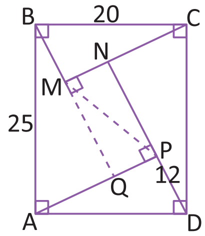
$$\frac{13x}{14x} = \frac{a_{13}}{7} \Rightarrow a_{13} = \frac{13}{2}$$

Piden:

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{13}{2} = \frac{1}{2}(1 + 2 + 3 + \ldots + 13)$$

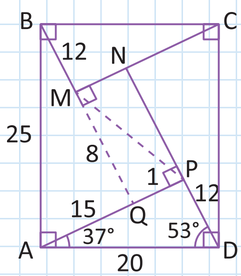
$$S = \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{13(14)}{2} \qquad \therefore\ S = 45{,}5 \text{ cm}$$

8 Si: ABCD es un rectángulo, AB = 25, BC = 20 y PD = 12. Calcula $(MP)^2$.



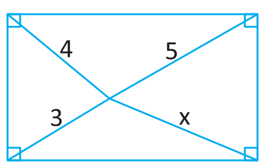
Resolución:

El ⊿APD es notable de 37° y 53°:
⇒ AP = 16
El ⊿AQB es notable de 37° y 53°:
⇒ BQ = 20; AQ = 15 ⇒ PQ = 1
El ⊿BMC es notable de 37° y 53°:
⇒ BM = 12 ⇒ MQ = 8
Luego, el gráfico es el siguiente:



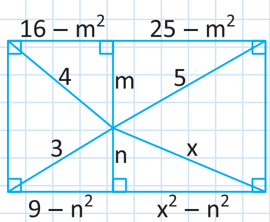
Finalmente:
⊿MQP (Pitágoras)
$MP^2 = 8^2 + 1^2$
$MP^2 = 65$

9 Una araña teje su tela en el marco de una ventana, para ello dispone de cuatro hilos que parten cada uno de un vértice. Si tres de ellos miden 3; 4 y 5 cm, el cuarto hilo mide:



Resolución:

Trazamos las dos alturas paralelas al menor lado de la ventana.
El gráfico es el siguiente:

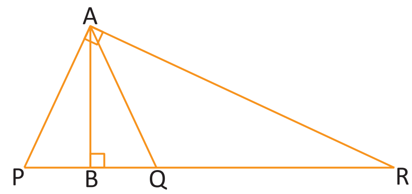


Del gráfico:
$16 - m^2 = 9 - n^2$
$7 = m^2 - n^2$ ...(I)

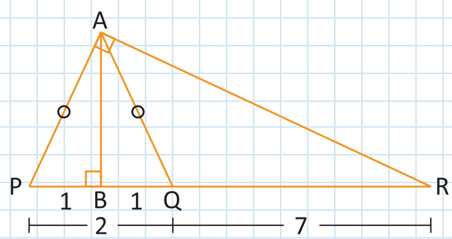
También:
$25 - m^2 = x^2 - n^2$
$25 - x^2 = m^2 - n^2$ ...(II)

Igualamos (I) y (II):
$7 = 25 - x^2$
$x^2 = 18$
$x = 3\sqrt{2}$ cm

10 En el siguiente gráfico, calcula AB, si PQ = 2, QR = 7 y AP = AQ.



Resolución:

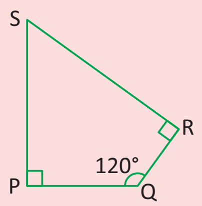


ΔAPQ: isósceles ⇒ $\overline{AB}$ es su altura, bisectriz y mediana.
PB = BQ = 1

⊿PAR: $AB^2 = PB \times BR$
$AB^2 = 1 . 8$
$AB^2 = 8$
$AB = 2\sqrt{2}$

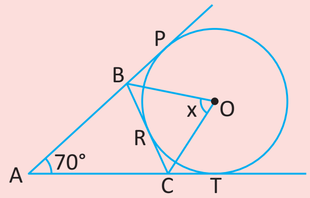
Actividades de razonamiento

1. En el cuadrilátero PQRS: $PQ = 12\sqrt{3}$ u y $QR = 8\sqrt{3}$ u, calcula PS + RS.



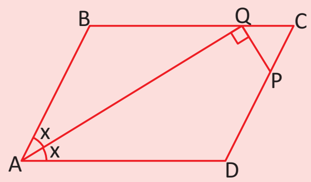
A) 50 u B) 40 u C) 60 u D) 30 u E) 20 u

2. De la figura, calcula x, si O es centro de la circunferencia (P, R, T son puntos de tangencia).



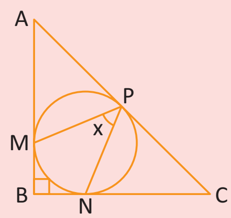
A) 30° B) 60° C) 80° D) 55° E) 35°

3. En la figura ABCD es un romboide, si AB = 6 cm, y AD = 8 cm. Calcula PD.



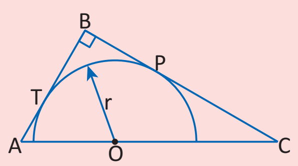
A) 1 cm B) 4 cm C) 5 cm
D) 2 cm E) 3 cm

4. De la figura mostrada, calcula la $m\angle MPN$.



A) 30° B) 45° C) 50° D) 37° E) 75°

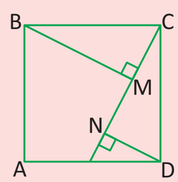
5. Si los catetos miden a y b (b > a), halla el radio de la semicircunferencia (P y T son puntos de tangencia).



A) ab B) b – a C) $\dfrac{2ab}{a+b}$

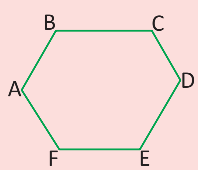
D) $\dfrac{a}{b-a}$ E) $\dfrac{ab}{a+b}$

6. Según el gráfico, calcula el lado del cuadrado si: CM = MN = 2 cm.



A) $6\sqrt{5}$ cm B) $3\sqrt{5}$ cm C) $\sqrt{5}$ cm
D) $4\sqrt{5}$ cm E) $2\sqrt{5}$ cm

7. Se muestra un hexágono equiángulo, si: AF = 12 u; AB = 16 u y CD = 10 u. Calcula DE.

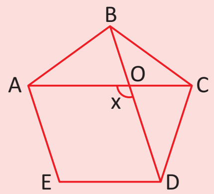


A) 20 u B) 18 u C) 16 u D) 13 u E) 15 u

8. Si a un polígono se le aumenta un lado, su número de diagonales aumenta en 6. Si se le disminuye un lado, el número de diagonales disminuye en x. Calcula x.

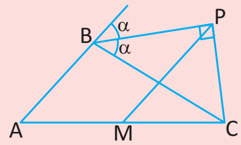
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9. En el polígono regular, calcula la medida del ángulo x.



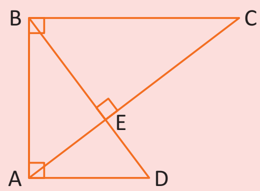
A) 108° B) 80° C) 36° D) 100° E) 72°

10. En la figura, AM = MC, AB = 5 m, BC = 7 m. Calcula PM.



A) 8 m B) 5 m C) 3 m D) 6 m E) 4 m

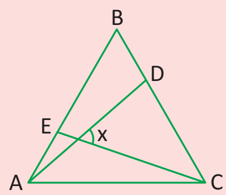
11. Si AE = a y EC = b, halla ED.



A) $(a + b)^{1/2}$ B) $(a - b)^{1/2}$ C) $\dfrac{a \, . \, b}{a + b}$

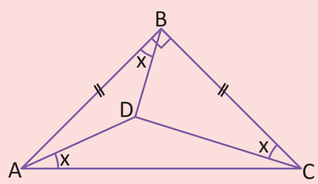
D) a . b E) $a \, . \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/2}$

12. En la figura mostrada, el ΔABC es equilátero, si AE = BD. Calcular el valo de x.



A) 80° B) 30° C) 60° D) 70° E) 40°

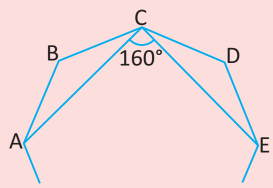
13. Calcula x.



A) 60° B) 53° C) $\dfrac{37°}{2}$

D) 30° E) $\dfrac{53°}{2}$

14. En la figura, se presenta parte de un polígono regular de n lados. ¿Cuánto vale n?



A) 36 B) 28 C) 72 D) 24 E) 18

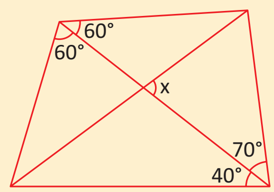
Claves

1. C	5. E	9. A	13. E
2. D	6. E	10. D	14. A
3. B	7. B	11. E	
4. B	8. B	12. C	

Reto



Halla x.

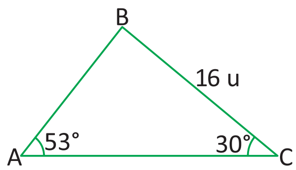


Rpta.: 80°

Refuerza practicando

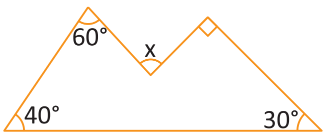
NIVEL 1

1. Del gráfico, calcula AB.



A) 4 u
B) 8 u
C) 6 u
D) 7 u
E) 10 u

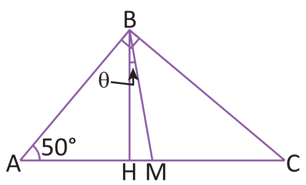
2. Calcula x, en la figura.



A) 70°
B) 50°
C) 60°
D) 40°
E) 30°

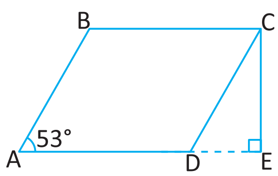
3. En la figura $\overline{BH}$ es altura y $\overline{BM}$ es mediana. Halla la medida de θ.

UNMSM 2004-II



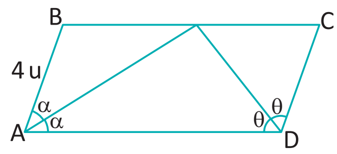
A) 10°
B) 30°
C) 40°
D) 60°
E) 20°

4. Si ABCD es un rombo, calcula AE, siendo CE = 8 u.



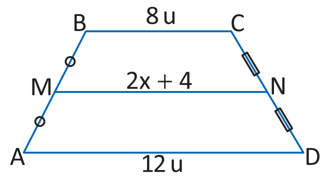
A) 16 u
B) 20 u
C) 16 u
D) 12 u
E) 18 u

5. En la figura, calcula BC, si ABCD es un paralelogramo.



A) 12 u
B) 8 u
C) 10 u
D) 4 u
E) 6 u

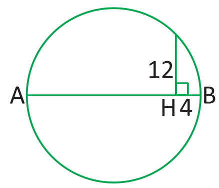
6. De la figura que se presenta, calcula: x, si $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$.



A) 7 u
B) 10 u
C) 6 u
D) 8 u
E) 3 u

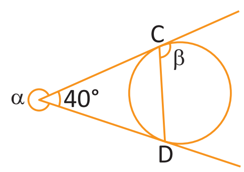
7. Halla el radio de la circunferencia, si $\overline{AB}$ es diámetro.

UNMSM 1996



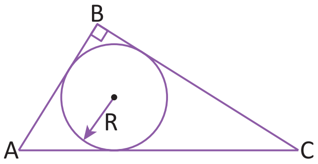
A) 18
B) 15
C) 20
D) 8
E) 12

8. En la figura C y D son puntos de tangencia. Calcula: $\alpha + \beta$.



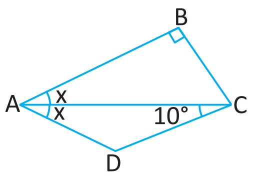
A) 400°
B) 460°
C) 480°
D) 430°
E) 450°

9. De la figura mostrada calcula R, si ab = 5 u, BC = 12 u.



A) 5 u
B) 1 u
C) 2 u
D) 3 u
E) 4 u

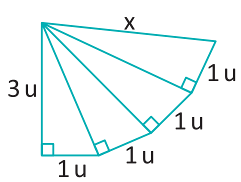
10. Según la figura, calcula x, si CD = 2BC.



A) 20°
B) 40°
C) 30°
D) 10°
E) 50°

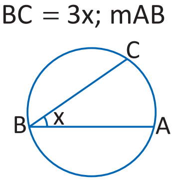
NIVEL 2

11. Halla x.



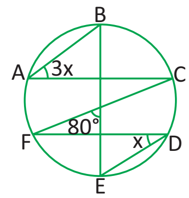
A) $\sqrt{14}$ u
B) $\sqrt{13}$ u
C) $\sqrt{11}$ u
D) $\sqrt{10}$ u
E) $\sqrt{12}$ u

12. Según la figura mostrada se cumple: $m\overset{\frown}{BC} = 3x$; $m\overset{\frown}{AB} = 4x$. Calcula x.



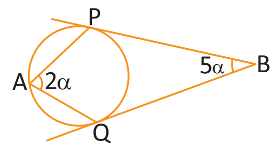
A) 20°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 40°

13. Según la figura, calcula x.



A) 60°
B) 30°
C) 40°
D) 10°
E) 20°

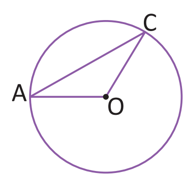
14. Según el gráfico mostrado, calcula α si P y Q son puntos de tangencia.



A) 50°
B) 10°
C) 60°
D) 20°
E) 40°

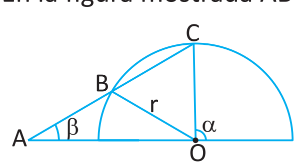
15. En la figura O es el centro, el ángulo AOC mide 110°, calcula la medida del ángulo OAC.

UNMSM 2004-II



A) 25°
B) 35°
C) 70°
D) 40°
E) 20°

16. En la figura mostrada AB = r y O es el centro.

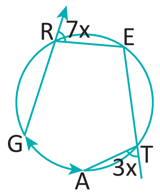


A) $\alpha = 2\beta$
B) $\alpha = 3\beta$
C) $\alpha = \beta$
D) $\alpha = 4\beta$
E) $\alpha = \beta/2$

Calcula la relación correcta.

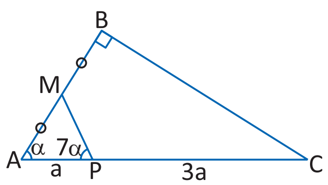
PUCP 1998-I

17) Si: $m\overset{\frown}{GA} = 80°$. Calcula x.



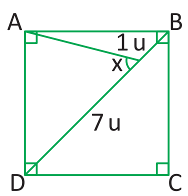
A) 16°
B) 20°
C) 17°
D) 12°
E) 14°

18) En la figura, calcula α.



A) 30°
B) 25°
C) 20°
D) 18°
E) 15°

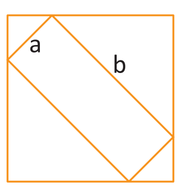
19) Si ABCD es un cuadrado, calcula x.



A) 45°
B) 53°
C) 37°
D) 60°
E) 30°

20) En la figura se tiene un cuadrado de lado L, en él se inscribe un rectángulo de lados a y b. Entonces el valor de L es:

UNI 2000-I



A) $(a + b)/\sqrt{2}$
B) $\sqrt{a^2 + b^2}$
C) $2\sqrt{a.b}$
D) $(a + b)/2$
E) $\sqrt{a.b}$

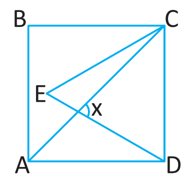
NIVEL 3

21) En un rombo ABCD, se traza la altura $\overline{BH}$ ($\overline{CH}$ es la prolongación de $\overline{DC}$); donde: $CH = \dfrac{AC}{2}$. Halla la $m\angle ABC$.

A) 30° B) 140° C) 90° D) 60° E) 120°

22) En la figura ABCD es un cuadrado y DCE es un triángulo equilátero, calcula x.

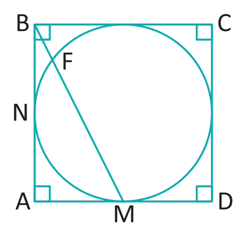
UNMSM 2008-II



A) 120°
B) 45°
C) 75°
D) 105°
E) 60°

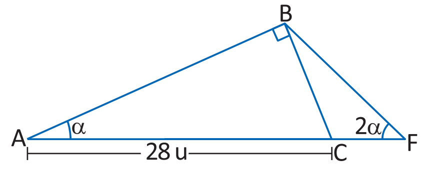
23) En la siguiente figura, M es un punto de tangencia. Si FM = 4, entonces la longitud de la circunferencia es:

UNI 2000-II



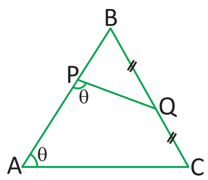
A) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$
B) $\frac{3}{2}\sqrt{5}\,\pi$
C) $2\sqrt{5}\,\pi$
D) $2\sqrt{5}$
E) 3π

24) En la figura, halla BF.



A) 28 u
B) 7 u
C) 16 u
D) 14 u
E) 21 u

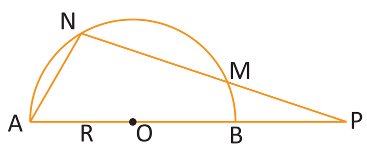
25. En la figura mostrada, calcula PQ, si AC = 8 cm.



A) 4 cm
B) 3 cm
C) 6 cm
D) 5 cm
E) 7 cm

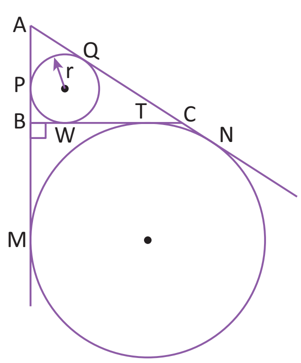
26. MP = R, OP = 5, calcula MN en función de R.

UNI 1996-II



A) $(25 - R^2)/R$
B) $(25 - 2R^2)/R$
C) $25 - R$
D) $(25 - R)/R^2$
E) $(25 - 2R)/R$

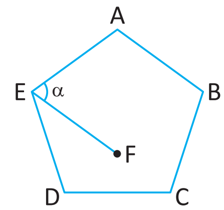
27. En la figura: r = 3 cm. Calcula TC.
(P; Q; W; T; M; N: puntos de tangencia)



A) 6 cm
B) 4 cm
C) 3 cm
D) 5 cm
E) 2 cm

28. En la figura, ABCDE es un pentágono regular; $\overline{EF} // \overline{AB}$. Calcula: α

UNMSM 2005-II



A) 40°
B) 45°
C) 60°
D) 30°
E) 72°

29. Calcula la medida de las diagonales de un pentágono regular cuyo lado mide 2 cm.

UNMSM 2004

A) $(1+\sqrt{5})$ cm
B) $(\sqrt{5}-2)$ cm
C) $\sqrt{5}$ cm
D) $(2+\sqrt{2})$ cm
E) $(\sqrt{5}+1)$ cm

30. En un triángulo rectángulo la mediana relativa a un cateto de longitud b se interseca perpendicularmente con la mediana relativa a la hipotenusa. Entonces la longitud del otro cateto es:

UNI 2001-I

A) $\frac{b}{2}$
B) $\frac{b}{3}$
C) $\frac{b}{3}\sqrt{3}$
D) $\frac{b}{4}(\sqrt{5}+1)$
E) $\frac{b}{2}\sqrt{2}$

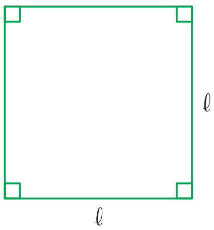
Claves

NIVEL 1			
1. E	9. C	17. E	25. A
2. D	10. A	18. C	26. B
3. A	NIVEL 2	19. B	27. C
4. C	11. B	20. A	28. E
5. B	12. E	NIVEL 3	29. E
6. E	13. E	21. D	30. E
7. C	14. D	22. C	
8. D	15. B	23. C	
	16. B	24. D	

Perímetros y áreas

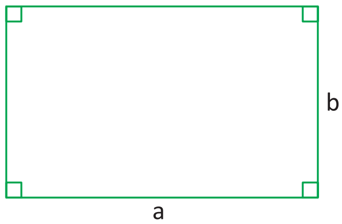
PERÍMETROS

Cuadrado



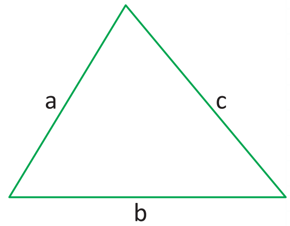
$2p = 4\ell$

Rectángulo

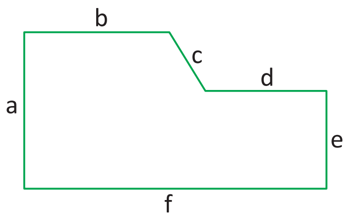


$2p = 2(a + b)$

Triángulo

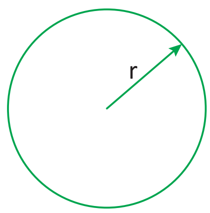


$2p = a + b + c$



$2p = a + b + c + d + e + f$

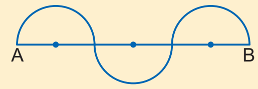
Circunferencia



$L = 2\pi r$



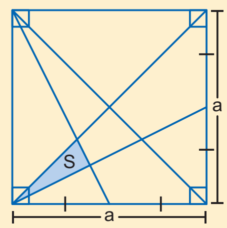
Importante



longitud de todas las semicircunferencias $= AB \cdot \frac{\pi}{2}$

Atención

Propiedad:



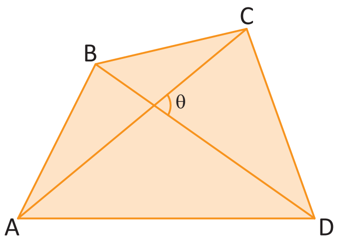
$S = \frac{a^2}{30}$



ÁREAS

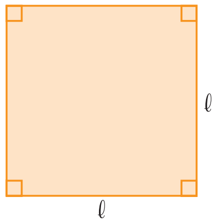
Áreas de regiones cuadrangulares

Cuadrilatero



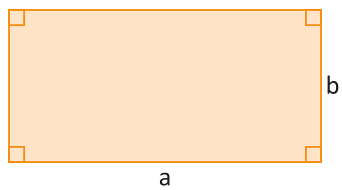
$A = \frac{AC \cdot BD}{2} \text{sen}\,\theta$

Cuadrado



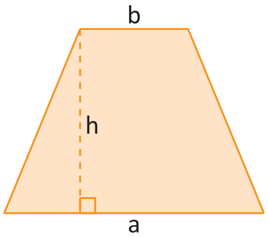
$A = \ell^2$

Rectángulo



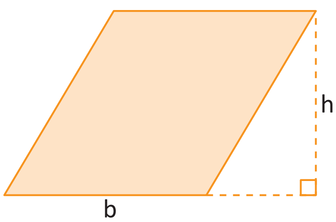
$A = a \cdot b$

Trapecio



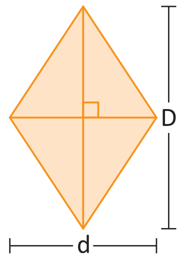
$A = \left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot h$

Romboide



$A = b \cdot h$

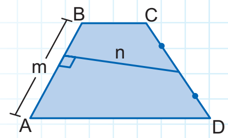
Rombo



$A = \frac{D \cdot d}{2}$

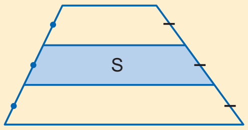
Nota

ABCD: trapecio



$A = m \cdot n$

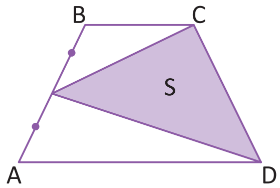
Importante



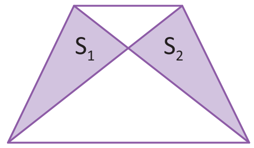
$S = \frac{A_{total}}{3}$



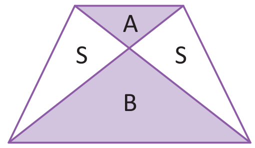
Propiedades en los trapecios



$S = \frac{A_{total}}{2}$

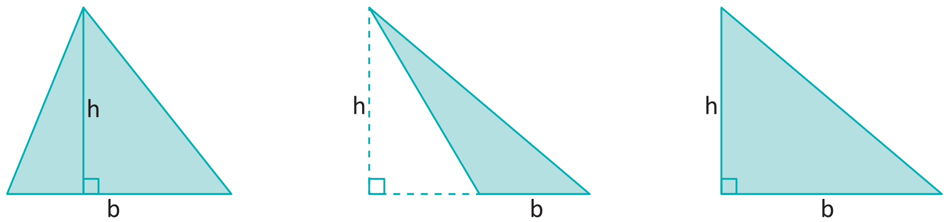


$S_1 = S_2$

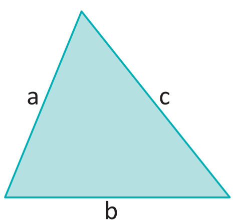


$S^2 = A \cdot B$

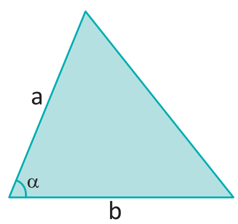
Áreas de regiones triangulares



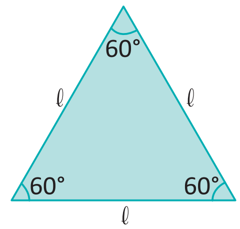
$A = \frac{b \cdot h}{2}$



$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



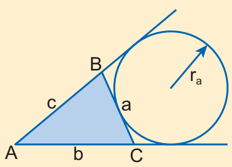
$A = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}$



$A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$

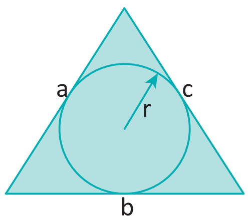
Importante

En función del exradio:

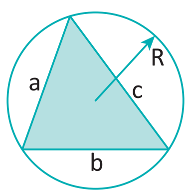


$A = (p - a)r_a$



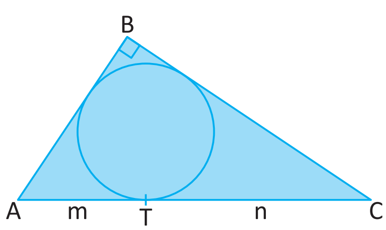


$A = p \cdot r$



$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

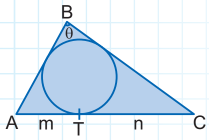
Teorema de Burlet



$A_{\Delta ABC} = m \cdot n$

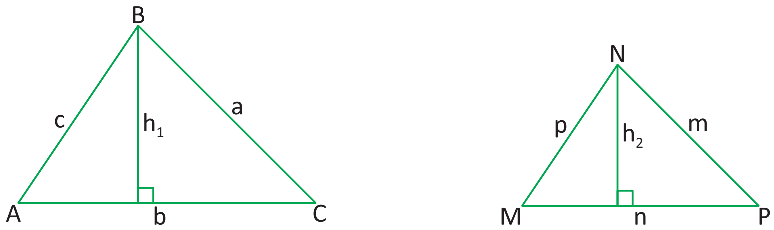
Nota

Si: $m\angle B = \theta$



$A_{\Delta ABC} = m \cdot n \cdot \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$

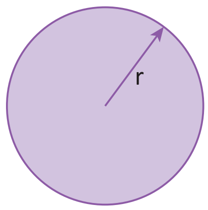
Propiedad de triángulos semejantes



$$\text{Si: } A_{\triangle ABC} \sim A_{\triangle MNP} \Rightarrow \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle MNP}} = \frac{a^2}{m^2} = \frac{b^2}{n^2} = \frac{c^2}{p^2} = \frac{(h_1)^2}{(h_2)^2}$$

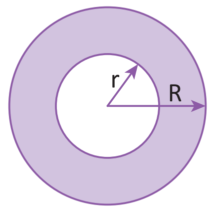
Áreas de regiones circulares

Círculo



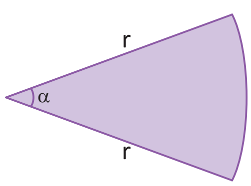
$$A = \pi \, . \, r^2$$

Corona circular



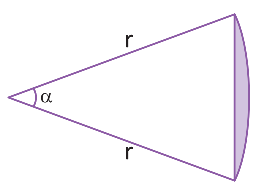
$$A = \pi \, (R^2 - r^2)$$

Sector circular



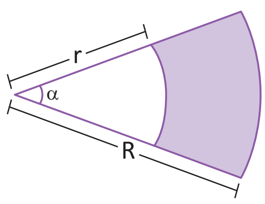
$$A = \frac{\pi \, . \, r^2 \, . \, \alpha}{360°}$$

Segmento circular



$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°} - \frac{r^2 \operatorname{sen}\alpha}{2}$$

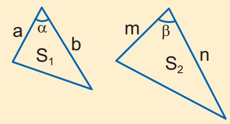
Trapecio circular



$$A = \frac{\pi \, (R^2 - r^2) \, \alpha}{360°}$$



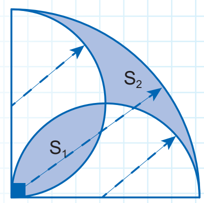
Recuerda



Si: $\alpha = \beta \ \vee \ \alpha + \beta = 180°$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a \, . \, b}{m \, . \, n}$$

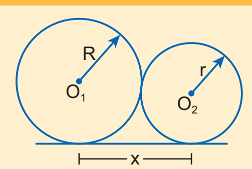
Nota



$$S_1 = S_2$$



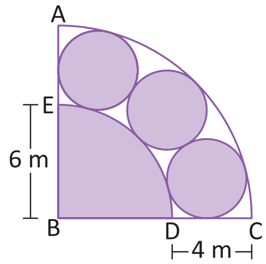
Atención



$$x = 2\sqrt{Rr}$$

Problemas resueltos

1 Halla el perímetro de la región sombreada, si ABC y EBD son cuadrantes y los tres círculos son iguales.



Resolución:

El perímetro de la región sombreada es igual a la longitud del arco ED de radio 6 m más la longitud de las tres circunferencias pequeñas de radio 2 m más la longitud EB y BD.

Luego:

$$2p = \ell_{\overset{\frown}{ED}} + 3\ell_{\odot} + EB + BD$$

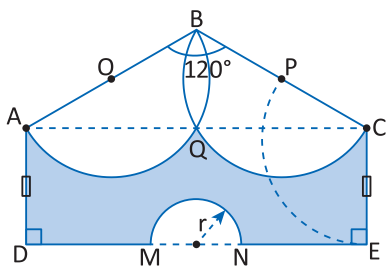
$$= \frac{2\pi \cdot 6}{4} + 3(2\pi \cdot 2) + 6 + 6$$

$$= 3\pi + 12\pi + 12$$

$$= 15\pi + 12$$

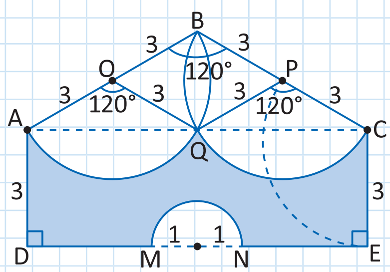
$$= 3(5\pi + 4)\text{ m}$$

2 Halla el perímetro de la figura sombreada.
Si: O; P y C son centros de circunferencias de radio igual a 3 m; r = 1 m; m∠ABC = 120°.



Resolución:

Trazamos $\overline{AQ}$ y $\overline{QC}$ para hallar las longitudes de los arcos $\overset{\frown}{AQ}$ y $\overset{\frown}{QC}$.



Del gráfico:

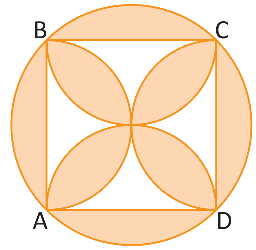
$$2p = \ell_{\overset{\frown}{AQ}} + \ell_{\overset{\frown}{QC}} + \ell_{\overset{\frown}{MN}} + AD + CE + DM + NE$$

$$= \frac{2\pi \cdot 3}{3} + \frac{2\pi \cdot 3}{3} + \frac{2\pi \cdot 1}{2} + 3 + 3 + 6\sqrt{3} - 2$$

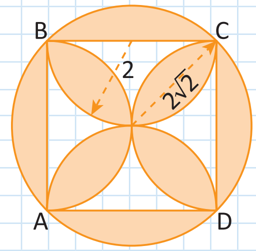
$$= 2\pi + 2\pi + \pi + 4 + 6\sqrt{3}$$

$$= (5\pi + 4 + 6\sqrt{3})\text{ m}$$

3 Si: ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 4 m. Calcula el perímetro de la región sombreada.



Resolución:



Del gráfico:

$$2p = \ell_{\odot} + \ell_{\overset{\frown}{AB}} + \ell_{\overset{\frown}{BC}} + \ell_{\overset{\frown}{CD}} + \ell_{\overset{\frown}{AD}} + AB + BC + CD + AD$$

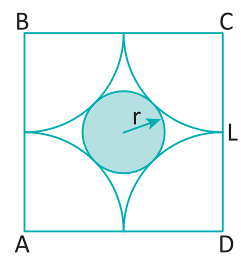
$$= 2\pi . 2\sqrt{2} + \frac{2\pi . 2}{2} + \frac{2\pi . 2}{2} + \frac{2\pi . 2}{2} + \frac{2\pi . 2}{2} + 4 + 4 + 4 + 4$$

$$2p = 4\pi\sqrt{2} + 2\pi + 2\pi + 2\pi + 2\pi + 16$$

$$= 4\pi\sqrt{2} + 8\pi + 16$$

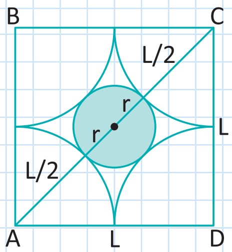
$$= 4(\sqrt{2}\pi + 2\pi + 4)\text{ m}$$

4 Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:

Para hallar el área de la región sombreada solo bastará calcular el radio de la circunferencia.



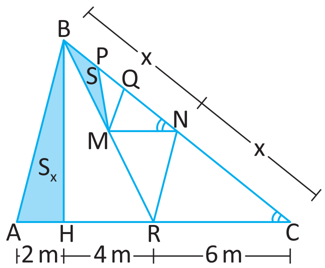
Luego: $r = \dfrac{L\sqrt{2} - L}{2} = \dfrac{L}{2}(\sqrt{2} - 1)$

Entonces: $A_{sombreada} = \pi \cdot \left[\dfrac{L}{2}(\sqrt{2} - 1)\right]^2$

$= \pi \cdot \dfrac{L^2}{4}(2 + 1 - 2\sqrt{2})$

$= \dfrac{L^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})\pi$

5 Halla el área de la región sombreada S_x, si $S = 2\ m^2$. Además en el triángulo BMN, los segmentos determinados por las cevianas $\overline{MP}$ y $\overline{MQ}$ son como 1; 2 y 3.



Resolución:

Según los datos:

BP = k; PQ = 2k y QN = 3k

Como $A_{\Delta BMP} = 2\ m^2$

$\Rightarrow A_{\Delta PMQ} = 4\ m^2$ y $A_{\Delta QMN} = 6\ m^2$

Luego: BM = MR $\Rightarrow A_{\Delta MNR} = A_{\Delta BMN}$

$= 2 + 4 + 6$

$A_{\Delta MNR} = 12\ m^2$

También: BN = NC $\Rightarrow A_{\Delta NRC} = A_{\Delta BRN}$

$A_{\Delta NRC} = 2 + 4 + 6 + 12$

$A_{\Delta NRC} = 24\ m^2$

Finalmente: $AH = \dfrac{1}{3} RC$

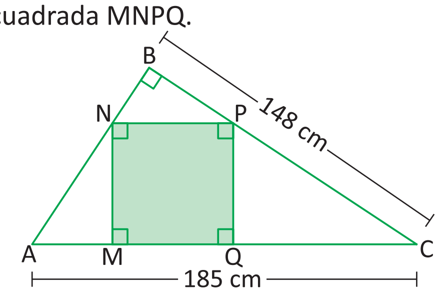
Entonces $A_{\Delta ABH} = \dfrac{1}{3} A_{\Delta RBC}$

$= \dfrac{1}{3}(2 + 4 + 6 + 12 + 24)$

$= \dfrac{1}{3}(48)$

$\therefore A_{\Delta ABH} = 16\ m^2$

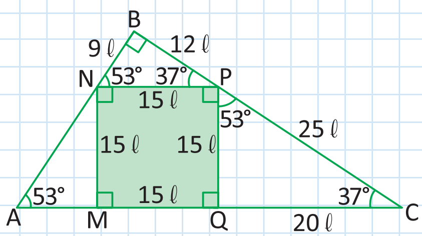
6 En la figura que se muestra. Calcula el área de la región cuadrada MNPQ.



Resolución:

Observamos que: $148 = 4 \times 37$ y $185 = 5 \times 37$

Es decir el ◺ABC es notable de 37° y 53°.



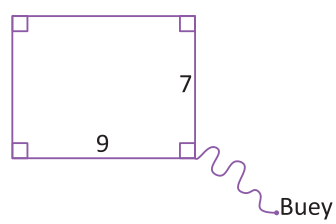
Del gráfico: $12\ell + 25\ell = 148$

$37\ell = 148 \Rightarrow \ell = 4$ cm

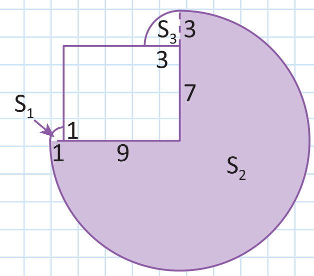
Finalmente: $A_{\square MNPQ} = (15\ell)^2 = (15(4))^2$

$\therefore A_{\square MNPQ} = 3600\ cm^2$

7 Un buey está atado a un poste en la esquina de una cabaña rectangular que se muestra en el gráfico, la cabaña tiene un largo de 9 m y un ancho de 7 m y la cuerda es de 10 m. El área en m^2, donde puede pastear el buey es:



Resolución:



Del gráfico:

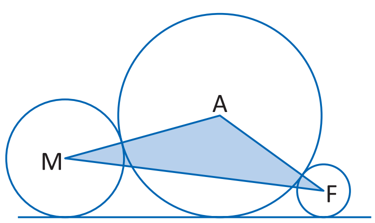
$A_{\text{pasteo del buey}} = S_1 + S_2 + S_3$

$= \dfrac{\pi \cdot 1^2}{4} + \dfrac{3}{4}\pi \cdot 10^2 + \dfrac{\pi \cdot 3^2}{4}$

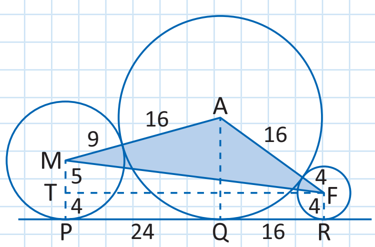
$= \dfrac{310\pi}{4}$

$= 77{,}5\ m^2$

8 Halla el área de la región sombreada, si: M, A y F son los centros de los círculos de radio 9 cm, 16 cm y 4 cm respectivamente.



Resolución:



Por propiedad:

$PQ = 2\sqrt{9 \cdot 16}$ y $QR = 2\sqrt{16 \cdot 4}$

$PQ = 24$ $QR = 16$

Luego del gráfico:

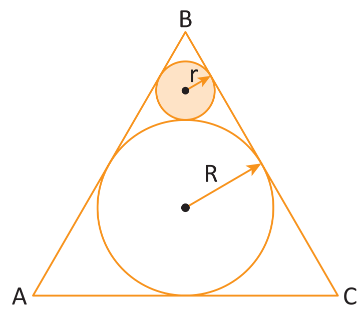
$A_{\text{sombreada}} = A_{\square PMAQ} + A_{\square QAFR} - (A_{\square TFRP} + A_{\Delta MTF})$

$= \left(\dfrac{16+9}{2}\right)24 + \left(\dfrac{16+4}{2}\right)16 - \left(4 \cdot 40 + \dfrac{5 \cdot 40}{2}\right)$

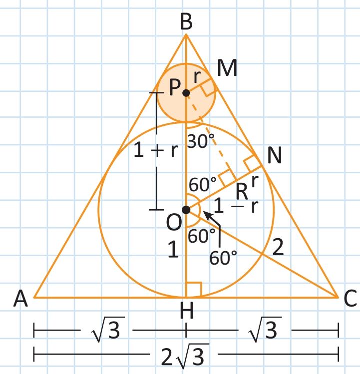
$= 300 + 160 - (160 + 100)$

$A_{\text{sombreada}} = 200\ cm^2$

9 En la figura que se muestra, el $\triangle ABC$ es equilátero de lado $2\sqrt{3}$ m. Halla el área del círculo pintado.



Resolución:



Trazamos $\overline{BH}$: altura
mediana
bisectriz $\Rightarrow HC = \sqrt{3}$

El ⊿OHC es notable de 30° y 60°.

$\Rightarrow OH = 1$ y $OC = 2$

$\Rightarrow R = 1$ m

El ⊿ORP es notable de 30° y 60°.

$\operatorname{sen}30° = \dfrac{OR}{OP} = \dfrac{1-r}{1+r}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1-r}{1+r}$

$1 + r = 2 - 2r$

$3r = 1 \Rightarrow r = \dfrac{1}{3}$ m

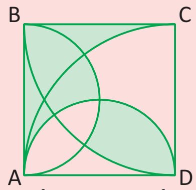
Finalmente:

$A_{\text{sombreada}} = \pi\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$= \dfrac{\pi}{9}\ m^2$

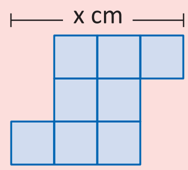
Actividades de razonamiento

1. En la figura, $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son diámetros de semicírculos, C y D son centros de arcos de circunferencia. ¿Qué parte del área del cuadrado ABCD es el área de la región sombreada?



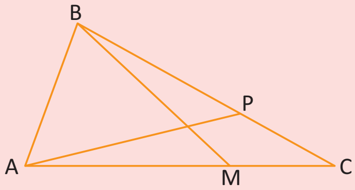
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 1 E) $\frac{2}{3}$

2. Con todos los cuadraditos iguales de la figura mostrada se forma un cuadrado. Calcula el lado del cuadrado formado.



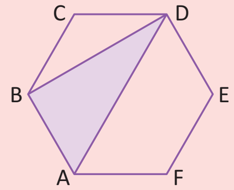
A) $x\sqrt{3}$ cm B) $\frac{x}{3}\sqrt{2}$ cm C) $\frac{x}{3}\sqrt{3}$ cm
D) $\frac{x}{2}\sqrt{2}$ cm E) $x\sqrt{2}$ cm

3. Del gráfico mostrado, BP = 2(PC), AM = 2(MC), si el área de la región sombreada es 20 m^2, calcula el área de la región ABC.



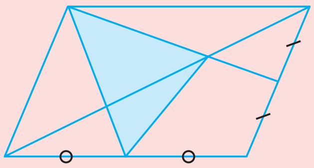
A) 100 m^2 B) 120 m^2 C) 200 m^2
D) 140 m^2 E) 150 m^2

4. Calcula el área de la región sombreada, si ABCDEF es un hexágono regular de 10 cm de lado.



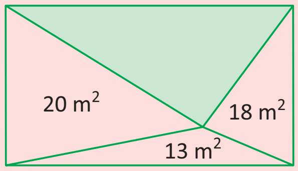
A) $20\sqrt{7}$ cm^2 B) $30\sqrt{10}$ cm^2 C) $50\sqrt{3}$ cm^2
D) $40\sqrt{5}$ cm^2 E) $60\sqrt{2}$ cm^2

5. La figura mostrada a continuación es un romboide de área igual a 24 m^2. Calcula el área de la región sombreada.



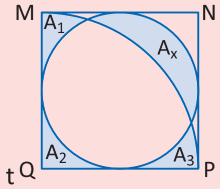
A) 3 m^2 B) 4 m^2 C) 5 m^2 D) 6 m^2 E) 7 m^2

6. En el siguiente rectángulo, calcula el área de la región sombreada.



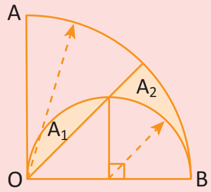
A) 20 m^2 B) 24 m^2 C) 25 m^2 D) 28 m^2 E) 30 m^2

7. Sabiendo que MNPQ es un cuadrado, calcular A_x; sabiendo que: $A_1 + A_2 + A_3 = 25$ m^2



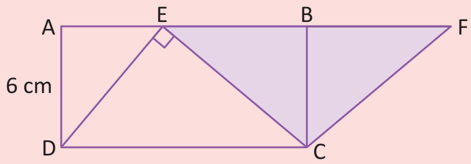
A) 20 m^2 B) 25 m^2 C) 30 m^2 D) 35 m^2 E) 40 m^2

8. De la figura, calcula el área de la región sombreada A_1, si el área de la región sombreada A_2 es de 4 cm^2.



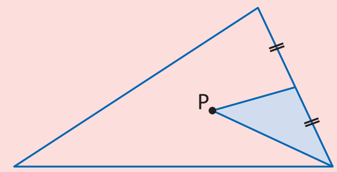
A) 3,5 cm^2 B) 4 cm^2 C) 4,5 cm^2 D) 5 cm^2 E) 5,5 cm^2

9. En el rectángulo ABCD, EB = BF y AE = 2 cm. Halla el área de la región sombreada.



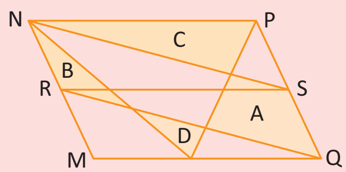
A) 102 cm^2 B) 108 cm^2 C) 96 cm^2
D) 92 cm^2 E) 110 cm^2

10. Halla el área de la región sombreada si el área total es 36 m2 y P es baricentro.



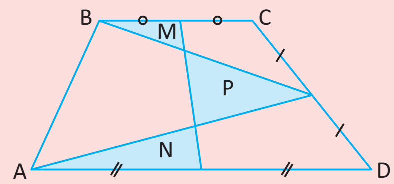
A) 8 m^2 B) 7 m^2 C) 4 m^2 D) 5 m^2 E) 6 m^2

11. Si MNPQ es un paralelogramo, halla el área D sabiendo que $\overline{RS}$ // $\overline{NP}$ y A = 8 m^2; B = 2 m^2 y C = 9 m^2.



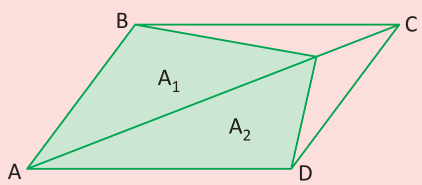
A) 2 m^2 B) 1 m^2 C) 3 m^2 D) 5 m^2 E) 4 m^2

12. Si ABCD es un trapecio ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), donde: M = 12 m^2 y N = 18 m^2. Calcula P.



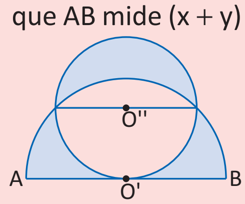
A) 15 m^2 B) 18 m^2 C) 20 m^2 D) 25 m^2 E) 30 m^2

13. Según el gráfico, calcula A_1/A_2 si ABCD es un romboide.



A) 3 B) 2 C) 1 D) 1,5 E) 1/3

14. Calcula el área de la región sombreada, sabiendo que AB mide (x + y) m, además O' y O'' son centros.



A) $\frac{(x+y)^2}{2}$ m^2 B) $\frac{(x-y)^2}{2}$ m^2 C) $\frac{(x+y)^2}{4}$ m^2
D) $\frac{(x-y)^2}{4}$ m^2 E) $(x-y)^2$ m^2

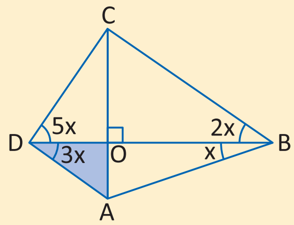
Claves

1. B	5. D	9. B	13. C
2. D	6. C	10. E	14. C
3. B	7. B	11. B	
4. C	8. B	12. E	

Reto



Calcula el área de la región sombreadas, si: OA = 2 u

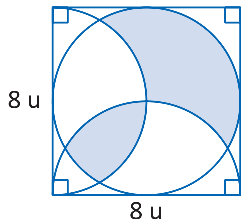


Rpta.: $2\sqrt{3}$ u^2

Refuerza practicando

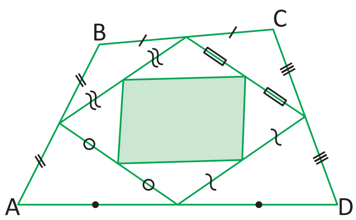
NIVEL 1

1. Halla el área de la región sombreada.



A) 15π u^2
B) 10π u^2
C) 6π u^2
D) 12π u^2
E) 8π u^2

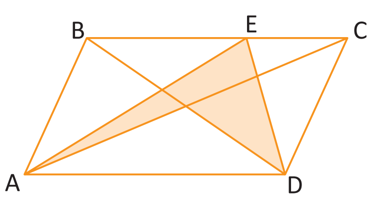
2. Halla el área de la región sombreada, sabiendo que el área del trapezoide ABCD es 64 m^2.



A) 8 m^2
B) 24 m^2
C) 16 m^2
D) 32 m^2
E) 20 m^2

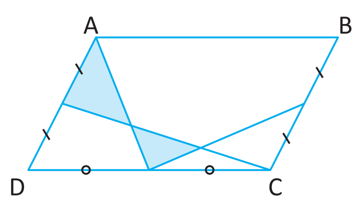
3. En la figura, ¿qué parte del área del paralelogramo ABCD es el área de la región?

UNMSM-2006 I



A) 2/5
B) 1/4
C) 1/3
D) 3/5
E) 1/2

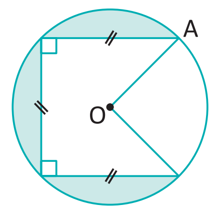
4. Calcula el área de la región sombreada, si el área ABCD es 480 m^2.



A) 48 m^2
B) 100 m^2
C) 120 m^2
D) 60 m^2
E) 30 m^2

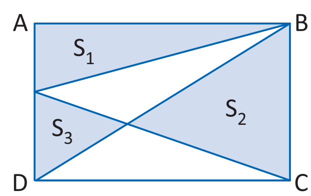
5. Si el radio OA de la circunferencia que aparece en el dibujo mide p unidades, el área de la región sombreada es:

UNMSM-2005 II



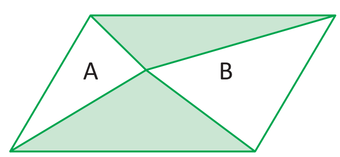
A) $p^2\left(\pi - \frac{1}{2}\right)$ u^2
B) $2p^2\left(\frac{\pi - 3}{4}\right)$ u^2
C) $p^2(\pi - 1)$ u^2
D) $\frac{3}{2}p^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ u^2
E) $p^2(\pi - 2)$ u^2

6. La figura ABCD es un rectángulo donde S_1 = 12 m^2, S_2 = 21 m^2; luego, se pide calcula S_3.



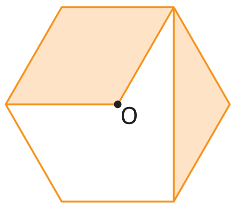
A) 6 m^2
B) 8 m^2
C) 9 m^2
D) 10 m^2
E) 12 m^2

7. En el siguiente paralelogramo, se pide calcula el área de la región sombreada.



A) A – B
B) $\sqrt{AB}$
C) A + 2B
D) (A + B)/2
E) A + B

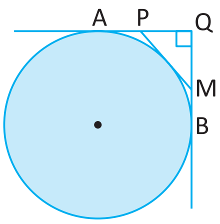
8) En el hexágono regular, se pide calcula el área de la región no sombreada, sabiendo que O es centro y el lado del hexágono mide 4 cm.



A) $7\sqrt{3}$ cm^2
B) $12\sqrt{3}$ cm^2
C) $5\sqrt{3}$ cm^2
D) $6\sqrt{3}$ cm^2
E) $8\sqrt{3}$ cm^2

9) En la figura, el perímetro del triángulo PQM es 14 m. Los puntos A y B son de tangencia y el segmento $\overline{PM}$ es tangente a la circunferencia. Calcula el área del círculo sombreado.

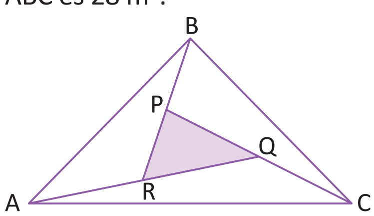
UNMSM-2005 I



A) 50π m^2
B) 64π m^2
C) 49π m^2
D) 36π m^2
E) 56π m^2

NIVEL 2

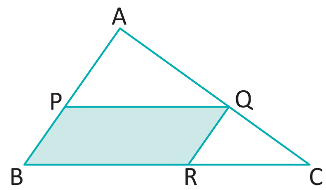
10) Calcula el área de la región sombreada, si AR = RQ, BP = PR, PQ = QC y el área de la región triangular ABC es 28 m^2.



A) 2 m^2
B) 8 m^2
C) 6 m^2
D) 10 m^2
E) 4 m^2

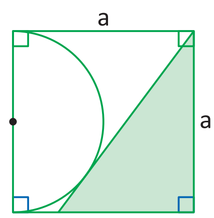
11) Las áreas de los triángulos APQ y QRC son 72 m^2 y 50 m^2, respectivamente. Calcula el área del paralelogramo BPQR.

UNMSM-2005 I



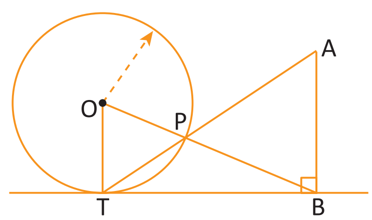
A) 90 m^2
B) 100 m^2
C) 80 m^2
D) 120 m^2
E) 60 m^2

12) Halla el área de la región sombreada.



A) $3a^2/4$
B) $a^2/6$
C) $3a^2/8$
D) $a^2/3$
E) $2a^2/5$

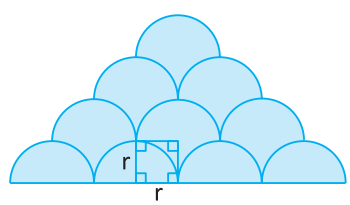
13) Calcula el área de la región triangular OTB, si TB = 15 m, AB = 9 m y además T es punto de tangencia.



A) 35 m^2
B) 65 m^2
C) 60 m^2
D) 47 m^2
E) 30 m^2

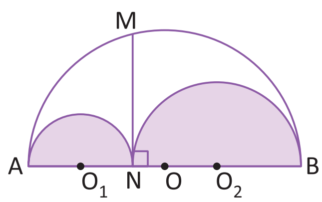
14) En la figura mostrada, el área de la superficie sombreada es:

UNI-2009 II



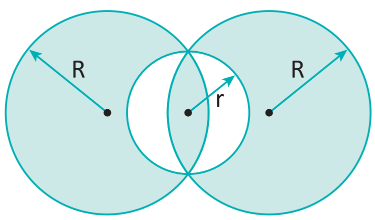
A) $(7\pi + 12)r^2$
B) $(10\pi + 12)r^2$
C) $(12\pi + 7)r^2$
D) $(2\pi - 12)r^2$
E) $(2\pi + 12)r^2$

15. Calcula el área de la región no sombreada, sabiendo que MN mide **a** m, además O; O_1 y O_2 son centros.



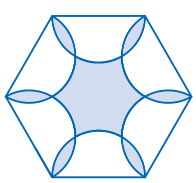
A) $a^2\dfrac{\pi}{3}$ m²
B) $a^2\dfrac{\pi}{4}$ m²
C) $a^2\dfrac{\pi}{5}$ m²
D) $(a^2+2)^2\dfrac{\pi}{3}$ m²
E) $(a^2-1)^2\dfrac{\pi}{2}$ m²

16. Calcula el área de la región sombreada, sabiendo que: R = 7 m y r = 4 m



A) 64π m²
B) 66π m²
C) 81π m²
D) 82π m²
E) 86π m²

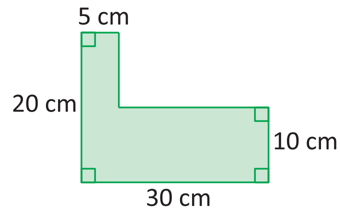
17. Calcula el área de la región sombreada, sabiendo que el área de la región limitada por el hexágono regular es $24\sqrt{3}$ m².



A) 3π m²
B) 4π m²
C) $\sqrt{3}\,\pi$ m²
D) 2π m²
E) $\sqrt{2}\,\pi$ m²

18. ¿Cuántas losetas cuadradas (todas iguales), se necesitará como mínimo para cubrir totalmente el piso de la figura mostrada?

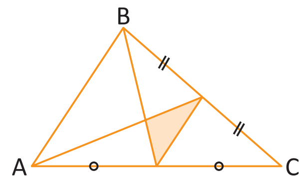
UNMSM-2006 II



A) 12
B) 18
C) 16
D) 20
E) 14

NIVEL 3

19. Si el área del triángulo ABC es 48 m², halla el área de la región sombreada.

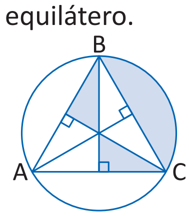


A) 16 m²
B) 8 m²
C) 2 m²
D) 4 m²
E) 6 m²

20. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se inscribe un cuadrado PQRS, con P y S sobre la hipotenusa $\overline{AC}$. Si AP = x cm, SC = y cm, halla el área del círculo inscrito en el cuadrado.

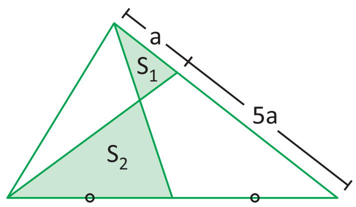
A) $\dfrac{xy\pi}{4}$ cm² B) $\dfrac{xy\pi}{2}$ cm² C) $\dfrac{xy\pi}{3}$ cm²
D) $2xy\pi$ cm² E) $xy\pi$ cm²

21. Halla la relación entre el área de la región sombreada y el área del círculo sabiendo que el triángulo ABC es equilátero.



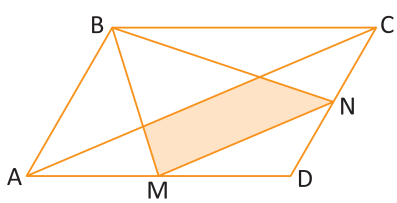
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

22. ¿En qué relación se encuentra S_1 y S_2?



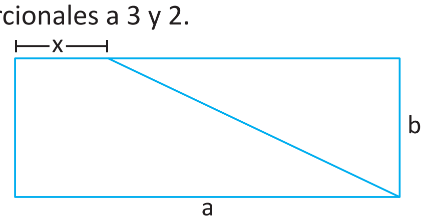
A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{11}$

23. Calcula el área de la región sombreada, si el área del paralelogramo ABCD es 48 cm^2; además, M y N son puntos medios.



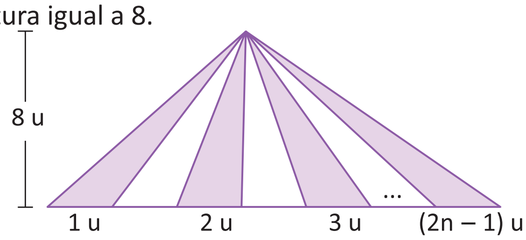
A) 15 m^2
B) 12 m^2
C) 10 m^2
D) 8 m^2
E) 6 m^2

24. El terreno rectangular mostrado tiene por largo a y por ancho b. ¿A qué distancia x debe ubicarse el extremo de recta que divida la región en dos áreas proporcionales a 3 y 2.



A) a/4 B) a/2 C) 3a/4 D) 2a/3 E) a/5

25. Halla el área de la parte sombreada, siendo la altura igual a 8.



A) $2n^2$ u^2 B) $4n^2$ u^2 C) $8n^2$ u^2
D) $6n^2$ u^2 E) $7n^2$ u^2

26. Tres puntos A; B; C forman un triángulo equilátero. Considerando P un punto interior al $\triangle$ABC tal que las alturas PD (del $\triangle$CPB), PE (del $\triangle$APB) y PF (del $\triangle$APC) miden 1 u, 2 u y 3 u respectivamente. Calcula el área del triángulo equilátero.

UNI-2000 II

A) $12\sqrt{3}$ u^2 B) 27 u^2 C) $15\sqrt{3}$ u^2
D) $36\sqrt{3}$ u^2 E) 36 u^2

Claves

NIVEL 1	8. B	15. B	22. B
1. E	9. C	16. D	23. C
2. C	NIVEL 2	17. B	24. E
3. B	10. E	18. E	25. B
4. D	11. D	NIVEL 3	26. A
5. D	12. C	19. D	
6. C	13. C	20. A	
7. E	14. E	21. B	

Análisis combinatorio

FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

El factorial de un número natural “n” se define como aquel producto que resulta de multiplicar todos los números naturales desde la unidad hasta el número “n”.

La notación a utilizar será: n!

Se lee: factorial del número “n” o “n” factorial.

$$n! = \begin{cases} 1 & ;\text{si } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n & ;\text{si } n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplos:

- $5! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 120$
- $7! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 = 5040$
- $(-1/2)!$ no está definido, pues $-1/2 \notin \mathbb{N}$.

Observación

El factorial de un número puede expresarse en función del factorial de otro número menor.

Ejemplo:

$7! = 7 \times 6!$

$7! = 7 \times 6 \times 5!$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4!$



PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

Principio de adición

Si un evento A se puede realizar de “m” maneras diferentes y otro evento B se puede realizar de “n” maneras diferentes, entonces el evento A o el evento B (A y B no simultáneos) se pueden realizar de “m + n” maneras diferentes.

Ejemplo:

Un comité docente, formado por 5 aritméticos, 3 algebraicos y 4 geómetras, estudian nuevas metodologías educativas. Si el comité ha recibido una invitación de impartir una conferencia al respecto, ¿de cuántas maneras puede el comité elegir un representante?

Resolución:

Aritméticos		Algebraicos		Geómetras	
5	+	3	+	4	= 12

∴ El comité puede elegir un representante de 12 maneras distintas.

Principio de multiplicación

Si un evento A ocurre de “m” maneras distintas y para cada una de éstas, otro evento B ocurre de “n” maneras distintas, entonces los eventos A y B se pueden efectuar simultáneamente (o uno seguido del otro), de $m \times n$ maneras distintas.

Ejemplo:

¿De cuántas maneras se puede seleccionar una vocal y una consonante de las letras de la palabra MURCIÉLAGO?

Resolución:

Para elegir una vocal se tiene 5 opciones (U; I; E; A; O).

Para elegir una consonante se tiene 5 opciones (M; R; C; L; G).

∴ n.° de maneras $= 5 \times 5 = 25$

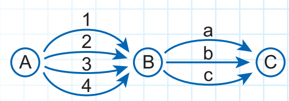
Nota

Ejemplo:

De una cuidad A a otra B hay 4 caminos diferentes y de B hacia la ciudad C hay 3 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá ir de A a C?

Resolución:

Consideremos el siguiente esquema:



Por el principio de multiplicación, el número de maneras de ir de A a C es:

$4 \times 3 = 12$

VARIACIONES

Se denomina variaciones de n elementos tomados de k en k, al total de grupos de k elementos cada uno, que pueden formarse con los n elementos de tal manera que cada grupo se diferencie del otro en por lo menos un elemento, o por el orden en el cual se han dispuesto sus elementos.

$$V_k^n = V(n; k) = \frac{n!}{(n-k)!};\ 1 \leq k \leq n$$



Observación

Cuando $n = k$, tenemos:

$$V_n^n = V(n; n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1}$$

$$\Rightarrow V_n^n = P(n) = n!$$

Ejemplo:
Una persona posee 3 anillos distintos. ¿De cuántas maneras puede colocarlos en sus dedos de la mano derecha, colocando solo un anillo por dedo?

Resolución:
Como el orden en que se colocan los anillos sí interesa, se trata de una variación de 5 elementos tomados de 3 en 3.

$$V_3^5 = V(5; 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$$

PERMUTACIONES

Se llama permutación de n elementos, al total de grupos diferentes que se forman con los n elementos de manera que cada grupo tenga los n elementos y solo difieren en el orden de sus elementos.

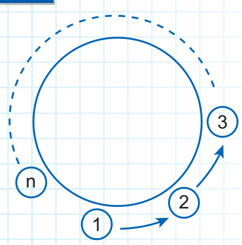
$$P(n) = n!$$

Permutación circular

Es un ordenamiento o arreglo de los elementos, alrededor de un punto de referencia (formando una línea cerrada).
Dado n objetos diferentes estos se pueden ordenar circularmente y el total de ordenamientos se calcula así:

$$PC_n = (n-1)!$$

Nota



$PC_n = (n-1)!$

Ejemplo:
¿De cuántas maneras pueden ubicarse alrededor de una fogata 5 parejas de enamorados, de manera que cada pareja permanezca junta, intercalándose un hombre y una mujer?

Resolución:
Como cada pareja de enamorados debe permanecer junta alrededor de una fogata, se trata de una permutación circular de 5 elementos.

$$PC_n = (5-1)! = 4! = 24$$

Permutación con elementos repetidos

Es un ordenamiento o arreglo de elementos, en los cuales algunos son de la misma clase.
Si se disponen de n elementos en los cuales hay:

n_1 de una primera clase.
n_2 de una segunda clase.
n_3 de una tercera clase.
⋮ ⋮
n_k de una k-ésima clase.

Donde: $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k \leq n$

Nota

Variación con repetición. Son aquellas cuyos elementos pueden repetirse una o varias veces, se representa por:

$$VR_k^n = n^k$$

El número de permutaciones en fila que se puede hacer con estos elementos se denota y se calcula así:

$$P^{n}_{n_1, n_2, n_3 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_k!}$$

Ejemplo:
Un estante tiene una capacidad para 8 libros de análisis combinatorio de pasta azul, 5 de estadística de pasta roja y 4 de probabilidades de pasta amarilla. ¿De cuántas maneras puede ordenarse los libros según el color?

Resolución:
Se trata de una permutación con elementos repetidos, de 17 elementos con 8; 5 y 4 elementos repetidos.

$$P^{17}_{8,5,4} = \frac{17!}{8!5!4!} = \frac{17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3\,063\,060$$

COMBINACIONES

Son los diferentes grupos o subconjuntos que se puede formar con elementos de un conjunto dado (tomándolos en partes o todos a la vez).
Si se disponen de "n" elementos diferentes y se les quiere combinar (agrupar) de "k" en "k" el número de combinaciones se calcula así:

$$C^{n}_{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ ;\ 0 < k \leq n$$

Ejemplo:
Un estudiante tiene que resolver 10 problemas de un total de 15 en un examen. ¿Cuántas maneras de escoger las preguntas tiene?

Resolución:
Como de las 15 preguntas tiene que escoger 10 de ellas, se trata de una combinación de 15 elementos tomados de 10 en 10.

$$C^{15}_{10} = \frac{15!}{10!\,(15-10)!} = \frac{15!}{10! \times 5!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10!}{10! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3003$$

Combinaciones con repeticiones

CR^{n}_{k} es el número de maneras de escoger k objetos o elementos distintos o no de un total de n objetos distintos dados.
Para calcular CR^{n}_{k} usaremos la siguiente expresión:

$$CR^{n}_{k} = C^{n+k-1}_{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \times k!}$$

Ejemplo:
¿Cuántos productos diferentes, cada uno de tres factores, se podrán obtener con los números 2; 5; 7 y 9?

Resolución:
Según el enunciado nada se opone a que en cada producto haya 2 o 3 factores iguales, luego los diferentes productos serán las combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 3 en 3.

$$CR^{4}_{3} = C^{4+3-1}_{3} = C^{6}_{3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{6 \times 3!} = 20$$

Recuerda

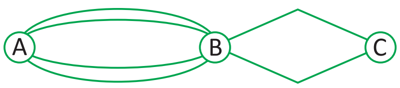
- $C^{n}_{k} = C^{n}_{n-k}$
- $C^{n}_{k} + C^{n}_{k+1} = C^{n+1}_{k+1}$
- $C^{n}_{k} = \frac{n}{k} C^{n-1}_{k-1}$
- $C^{n}_{k} = \frac{n-k+1}{k} C^{n}_{k-1}$
- $C^{n}_{k} = C^{n}_{\ell}$

  $\Rightarrow k = \ell \vee k + \ell = n$



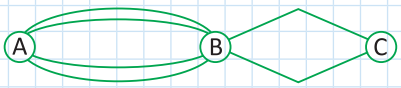
Problemas resueltos

1 ¿De cuántas maneras se puede ir de A a C pasando por B y sin retroceder? (las líneas son caminos).



Resolución:

M: ir de A hacia B.
N: ir de B hacia C.



4 formas × 2 formas = 8

Como se debe pasar siempre por B, se deben realizar M y N de manera conjunta.

Por lo tanto, se podrá ir de 8 maneras diferentes.

2 Con 9 jugadoras, ¿cuántos equipos de vóley diferentes se podrán formar sabiendo que Lady siempre está en el saque y Xiomara siempre está en la defensa?

Resolución:

Un equipo lo conforman 6 jugadoras, pero por dato Lady y Xiomara siempre están en el equipo, por lo tanto sobran 7 jugadoras. Entonces:

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!6}$$

$$C_4^7 = 35$$

Luego, se podrán formar 35 equipos.

3 ¿De cuántas maneras diferentes 2 peruanos, 4 argentinos y 3 colombianos pueden sentarse en fila de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos?

Resolución:

Como los de la misma nacionalidad se sientan juntos, entonces:

$$\underbrace{\text{2 peruanos}}_{2!} \times \underbrace{\text{4 argentinos}}_{4!} \times \underbrace{\text{3 colombianos}}_{3!} = 288$$

Si se considera a cada grupo como un elemento se puede permutar de 3! = 6 maneras.

∴ 288 × 6 = 1728 maneras diferentes de sentarse.

4 De 4 naranjas, 5 melocotones y 3 manzanas (todas de diferente tamaño), ¿cuántas selecciones de frutas pueden hacerse teniendo por lo menos una de cada clase?

Resolución:

$$\underbrace{(C_1^4+C_2^4+C_3^4+C_4^4)}_{(2^4-1)}^{\text{Naranja}}.\underbrace{(C_1^5+C_2^5+C_3^5+C_4^5+C_5^5)}_{(2^5-1)}^{\text{Melocotón}}\underbrace{(C_1^3+C_2^3+C_3^3)}_{(2^3-1)=3259}^{\text{Manzana}}$$

Por lo tanto, pueden hacerse 3255 selecciones de frutas.

5 En un programa de computación se crea un nuevo código para los estudiantes conformado por dos letras, seguidas de tres dígitos, pero sin que las letras y los dígitos se repitan en un mismo código. ¿Cuál es el número total de códigos que se pueden generar con este diseño?

Resolución:

Sabemos:
Hay 27 letras: a; b; c; d; ...; z
Hay 10 dígitos: 0; 1; 2; 3; ...; 9
Como los dígitos y las letras no se deben repetir e importa el orden, aplicamos variación.

Código:

$$\underbrace{\overbrace{_\ _}^{\text{2 letras}}}_{V_2^{27}} \times \underbrace{\overbrace{_\ _\ _}^{\text{3 dígitos}}}_{V_3^{10}}$$

$$\frac{27!}{(27-2)!} \times \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{27!}{25!} \times \frac{10!}{7!}$$

$$V_2^{27} \times V_3^{10} = 505\,440$$

6 ¿Cuántas palabras adicionales con sentido o no se pueden formar con las letras de la palabra ARITMÉTICA?

Resolución:

Se observa:
A se repite 2 veces
I se repite 2 veces
T se repite 2 veces
R; M; E y C solo se repiten una vez cada una; luego se trata de un ordenamiento con elementos repetidos:

$$P^{10}_{2;2;2;1;1;1;1} = \frac{10!}{2!\times 2!\times 2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!}$$

$$= 453\,600$$

Pero nos piden palabras adicionales, entonces:
$453\,600 - 1 = 453\,599$

7 La señorita Dina que acaba de hacer su primera comunión, desea repartir las 9 estampas que le queda, 4 a Julio, 3 a Josué y 2 a Marco. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

Resolución:

Estamos ante una permutación con elementos repetidos.
Calculamos el número de permutaciones de 9 elementos con 4; 3 y 2 elementos repetidos.

$$P^{9}_{4;3;2} = \frac{9!}{4!3!2!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{4!3\times 2\times 1\times 2\times 1}$$

$$= 1260$$

8 En una clínica trabajan 18 enfermeras. ¿Cuántas guardias diferentes de 3 enfermeras pueden tomarse?

Resolución:

Se trata de una combinación.
Calculamos el número de combinaciones de 18 elementos tomados de 3 en 3.

$$C^{18}_{3} = \frac{18!}{3!(18-3)!} = \frac{18!}{3!15!}$$

$$= \frac{18\times 17\times 16\times 15!}{3\times 2\times 1\times 15!} = 816$$

9 Una compañía desea ascender a 3 de sus 15 empleados más eficientes para los cargos de gerente de ventas, finanzas y control de calidad. ¿Cuántas opciones tiene para efectuar este ascenso?

Resolución:

Se trata de una variación de 15 elementos tomados de 3 en 3.

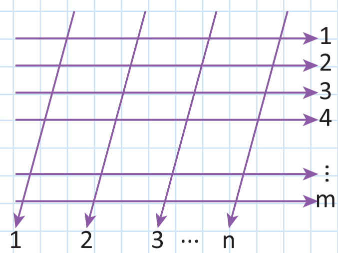
$$V^{15}_{3} = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!}$$

$$= \frac{15\times 14\times 13\times 12!}{12!}$$

$$\therefore V^{15}_{3} = 2730$$

10 ¿Cuántos paralelogramos en total se pueden formar al cortar un sistema de 7 rectas paralelas con otro sistema de 4 rectas paralelas?

Resolución:



En general, el número total de paralelogramos será:

$$C^{n}_{2}\times C^{m}_{2}$$

Del enunciado: $n = 4 \wedge m = 7$

$$C^{7}_{2}\times C^{4}_{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!}\times\frac{4!}{2!(4-2)!}$$

$$= \frac{7!}{2\times 5!}\times\frac{4!}{2\times 2!}$$

$$= \frac{7\times 6\times 5!}{2\times 5!}\times\frac{4\times 3\times 2!}{2\times 2!}$$

$$= 21\times 6$$

$$= 126$$

Actividades de razonamiento

1. Si: $\dfrac{n!(n!-3)}{n!+4} = 18$

Determina el valor de: $K = \sqrt{n^2 + 3n + 7}$

A) $\sqrt{47}$ B) $\sqrt{17}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $\sqrt{35}$ E) $\sqrt{61}$

2. Calcula x, en:

$$\frac{C_2^x + C_3^{x+1}}{C_4^{x+2}} = \frac{7}{5}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 10

3. Resuelve:

$$x\left[\frac{x! + 2(x-1)!}{x! + (x+1)!}\right] = x! - 23$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4. Determina el equivalente de:

$$C_0^n + \frac{C_1^n}{2} + \frac{C_2^n}{3} + \frac{C_3^n}{4} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$$

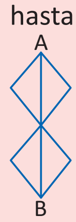
A) 2^{n+1} B) 2^{n-1} C) $2^{n+1} - 1$

D) $\dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ E) $\dfrac{2^{n+1} + 1}{n-1}$

5. Para vestirse, Juana dispone de tres faldas distintas y cuatro blusas también distintas. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá vestir Juana?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 1 E) 12

6. ¿Cuántos caminos diferentes existen para ir de A hasta B sin retroceder?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

7. En un estanque hay quince patos y ocho gansos.

a) ¿De cuántos modos se pueden escoger un pato y un ganso?

b) Si la elección anterior ya fue efectuada, ¿de cuántas maneras se puede efectuar nuevamente?

A) 110; 96 B) 120; 98 C) 105; 112

D) 110; 98 E) 114; 94

8. Calcula el número total de ordenamientos que se pueden realizar con todas las letras de la palabra TERRESTRE, de tal manera que las letras E se encuentren juntas.

A) 423 B) 450 C) 458

D) 420 E) 510

9. ¿Cuántas palabras con sentido o no se pueden formar con las letras de la palabra SUSURRO?

A) 620 B) 630 C) 640
D) 580 E) 590

10. Betty, Walter y cuatro amigos más se van a sentar alrededor de una mesa circular. ¿De cuántas maneras diferentes lo pueden hacer, si Walter y Betty desean sentarse juntos?

A) 24 B) 48 C) 16 D) 12 E) 20

11. Con seis perlas de diferentes tamaños se quiere fabricar un collar; ¿de cuántas maneras diferentes podremos hacerlo, si la más grande y la más pequeña van juntas?

A) 48 B) 240 C) 24 D) 120 E) 720

12. Con siete fichas negras y cuatro blancas se desea formar grupos de seis. ¿De cuántas maneras podrán formarse los grupos de modo que en cada grupo existan dos fichas blancas?

A) 210 B) 220 C) 200 D) 205 E) 180

13. En un banquete hay doce alumnos y tres profesores, y se obtienen fotografías distintas de forma que en cada fotografía entren cinco personas. ¿Cuántas fotografías distintas habrá en las que estén dos profesores?

A) 420 B) 960 C) 660 D) 810 E) 540

14. En una tienda hay seis camisas y cinco pantalones que me gustan. Si decido comprar tres camisas y dos pantalones, ¿de cuántas maneras diferentes puedo escoger las prendas que me gustan?

A) 100 B) 120 C) 200 D) 240 E) 480

Claves

1. D	5. E	9. B	13. C
2. C	6. C	10. B	14. C
3. C	7. B	11. A	
4. D	8. D	12. A	

Reto



Si: x; y $\in \mathbb{Z}^+$ resuelva la ecuación:

$1! + 2! + 3! + ... + x! = y^2$

Indica el número de soluciones que existen.

Rpta.: 2 soluciones

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿De cuántas formas diferentes pudieron sentarse en la última cena, alrededor de la mesa, Jesucristo y los 12 apóstoles?

   Observación: asumir que la mesa era circular.

   A) 13! B) 12! C) 11! D) 10! E) 14!

2. ¿Cuántas ordenaciones lineales distintas pueden formarse con todas las letras de la palabra permuta?

   A) 5040 B) 108 C) 360 D) 380 E) 840

3. ¿Cuántos números de 3 cifras distintos existen?

   A) 900 B) 810 C) 648 D) 721 E) 878

4. En una clínica trabajan 18 enfermeras. ¿Cuántas guardias diferentes de 3 enfermeras pueden formarse?

   A) 476 B) 521 C) 121 D) 816 E) 416

5. Se quiere tomar una foto a un grupo de 8 alumnos, pero en la foto solo pueden aparecer 5 alumnos sentados en línea recta. ¿De cuántas maneras diferentes se puede tomar dicha foto?

   A) 336 B) 330 C) 6720 D) 252 E) 521

6. ¿Cuántas palabras diferentes con sentido o no se pueden formar con las letras de la palabra MISSISSIPPI?

   A) 11! B) 10! C) 20 240
   D) 340 340 E) 34 650

7. Cinco amigos se encuentran en una fiesta. ¿Cuántos saludos de mano se intercambian si cada amigo estrecha la mano de todos los demás solo una vez?

   A) 20 B) 10 C) 8 D) 4 E) 5

8. Alrededor de una mesa circular de 6 asientos se ubican 2 niñas y 3 niños. ¿De cuántas formas podrán hacerlo, si el asiento vacío debe quedar entre las niñas?

   A) 4 B) 6 C) 12 D) 18 E) 24

9. El número de variaciones de x letras diferentes tomadas de cuatro en cuatro, es al número de variaciones tomadas de cinco en cinco como 1 es a 8. Halla x.

   A) 6 B) 10 C) 12 D) 14 E) 8

NIVEL 2

10. Si el número de combinaciones de x objetos tomados de 6 en 6 es 30 veces mayor que el de combinaciones de esos objetos tomados de 4 en 4, halla x.

    A) 24 B) 30 C) 8 D) 28 E) 35

11. El equipo de fulbito de Intelectum tiene 10 jugadores. ¿Cuántos equipos diferentes de 6 jugadores cada uno podrá formarse, sabiendo que en todos ellos siempre tiene que estar como capitán el mismo jugador?

A) 140 B) 126 C) 15 120
D) 9360 E) 1120

12. Se va a colorear un mapa de cuatro países, con colores diferentes para cada país. Si hay disponibles 6 colores diferentes, ¿de cuántas maneras diferentes se puede colorear el mapa?

A) 36 B) 72 C) 240 D) 360 E) 420

13. ¿De cuántas formas pueden colocarse los 5 delanteros de un equipo de fútbol si los extremos permanecen invariables?

A) 120 B) 60 C) 6 D) 22 E) 24

14. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ubicar 5 parejas de esposos alrededor de una fogata, tal que cada matrimonio siempre permanezca junto?



A) 362 B) 144 C) 1236 D) 768 E) 760

15. ¿De cuántas maneras se podrán ubicar en una fila 4 hombres y 3 mujeres, si estas deben ocupar los lugares pares?

A) 120 B) 121 C) 144 D) 72 E) 36

16. Determina M + K, en la siguiente igualdad:
$C^{K+1}_{p-1} = C^{M+2}_{13-p}$; siendo $p \neq 7$

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) Faltan datos

17. Simplifica:

$$\frac{C^{21}_{8} + C^{21}_{13}}{C^{18}_{5} + C^{18}_{12} + C^{19}_{12} + C^{20}_{8}}$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 2 E) 4

18. Calcula el valor de:

$$F = \frac{1}{(x+1)!} + \left[\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{x-1}{x!} + \frac{x}{(x+1)!}\right]$$

A) $x + 1$ B) 1 C) $x - 1$ D) $\frac{1}{x}$ E) $x!$

NIVEL 3

19. ¿Cuántas cantidades diferentes de dinero pueden formarse con las monedas siguientes: una de 50 centavos, una de un sol, una de 5 soles, una de 10 soles, una de 50 soles y una de 100 soles?

A) 31 B) 63 C) 32 D) 62 E) 16

20. Tenemos 7 bolas numeradas y se quiere saber de cuántas maneras podemos sacar primero 2 bolas, luego 3 y finalmente 2 en ese orden.

A) 120 B) 210 C) 420 D) 720 E) 56

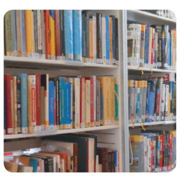
21. Dados: 5 ingenieros, 4 periodistas y 3 matemáticos, escoger un comité de 6 personas que tenga 3 ingenieros, 2 periodistas y 1 matemático. ¿De cuántas maneras se podrá hacer?

A) 180 B) 182 C) 190 D) 200 E) 360

22. Hay dos obras de 3 volúmenes cada una y otras dos de dos volúmenes cada una. ¿De cuántas maneras pueden colocarse todos los libros en un estante, de modo que no se separen los volúmenes de la misma obra?

A) 3456 B) 3600 C) 96
D) 3920 E) 36 450

23. En una biblioteca hay 8 libros de Geometría, 14 de álgebra, 10 de física y 5 de química. ¿De cuántas maneras puede un estudiante seleccionar 4 libros, de manera que sea uno de cada curso mencionado?



A) 3200 B) 1800 C) 2700
D) 4360 E) 5600

24. Una moneda cuyas caras están marcadas con los números 2 y 3, respectivamente, es lanzada 5 veces. Determina de cuántas maneras se obtendrá como suma 12.

A) 120 B) 60 C) 30 D) 15 E) 10

25. El departamento de tránsito desea elaborar nuevas placas de rodaje, cuyo diseño es de 3 letras, seguidas de 4 dígitos. ¿Cuántas placas diferentes se podrán elaborar si se dispone de solo 10 letras del abecedario y de los dígitos impares? Se sabe, además, que las letras sí pueden repetirse, pero los dígitos no.

A) 96 400 B) 120 000 C) 450 000
D) 625 000 E) 100 000

26. Cierto día oscuro en la maternidad de Lima nacen cuatro pares de mellizos idénticos; dos pares de mellizas idénticas; nueve niños y 11 niñas. Se utiliza una tinta no indeleble para escribir sus nombres. Al día siguiente (aún oscuro) la tinta desaparece. ¿De cuántas maneras es posible mezclar a los niños?

A) $32!$ B) $32!31!$ C) $32!/2!$
D) $32!/6!$ E) $32!/(2!)^6$

27. Halla x en: $1!2^2 + 2!3^2 + 3!4^2 + ... + 20!21^2 = x! - 2!$

A) 22 B) 24 C) 20 D) 21 E) 30

Claves

NIVEL 1	8 C	15 C	22 A
1 B	9 C	16 A	23 E
2 A	NIVEL 2	17 D	24 E
3 C	10 E	18 B	25 B
4 D	11 B	NIVEL 3	26 E
5 C	12 D	19 B	27 A
6 E	13 C	20 B	
7 B	14 D	21 A	

Probabilidades

EXPERIMENTO ALEATORIO (ε)

Es toda prueba o ensayo cuyo resultado no se puede predecir con seguridad antes de realizar la prueba, ya que presenta más de un posible resultado.

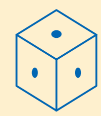
Ejemplos:

- Extraer al azar una carta de una baraja de 52 y observar el resultado.
- Elegir 2 personas de un grupo de 3 mujeres y 1 hombre.

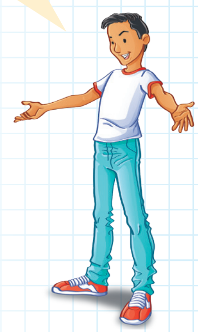
Observación

Aquella prueba o ensayo cuyo resultado puede predecirse con seguridad antes de su realización se denomina experimento determinístico.

Ejemplo:
Supongamos que tenemos un dado, como el que se observa en la figura, es decir, con sus 6 caras marcadas por el mismo puntaje.



Al lanzar el dado se obtiene como único resultado posible el punto 1.



ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Es el conjunto de todos los resultados posibles que tiene un experimento aleatorio.

Ejemplos:

- Del experimento de extraer una carta al azar, su espacio muestral sería:
  $\Omega_1 = \{A; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; J; Q; K\}$
- Del experimento de elegir 2 personas, su espacio muestral sería:
  $\Omega_2 = \{M_1M_2; M_1M_3; M_1H; M_2M_3; M_2H; M_3H]$

EVENTO O SUCESO (A; B; C; ...)

Es cualquier subconjunto del espacio muestral.
Ejemplos:

- Ω_1: evento A (solo mujeres)
  $A = \{M_1M_2; M_2M_3; M_1M_3\}$
- Ω_2: evento B (puntaje mayor a 10)
  $B = \{J; Q; K\}$

Eventos mutuamente excluyentes

Sean A y B dos eventos de un espacio muestral, se dice que estos eventos son mutuamente excluyentes (disjuntos) si no pueden ocurrir juntos; esto es: $A \cap B = \varnothing$

Ejemplos:

- A: obtuvieron nota mayor a 10.
  $A = \{11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$
- B: obtuvieron nota menor que 10.
  $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Entonces: $A \cap B = \varnothing$

Nota

En muchos casos no es necesario determinar a los elementos del espacio muestral, solo interesa saber cuántos elementos existen, para lo cual se va emplear elementos de análisis combinatorio.



Eventos independientes

Se dice que dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

Siendo A un evento de un espacio muestral (Ω), entonces la probabilidad de ocurrencia de A se denota por P(A) y está dada por la relación:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{n.° de casos favorables del suceso A}}{\text{n.° de casos totales del experimento aleatorio}}$$

Nota

Una moneda tiene una cara y sello, es decir, cada moneda tiene dos casos totales.

En general, para "n" monedas se cumple que:

n.° de casos totales = 2^n



Ejemplo:
Hilary rinde su examen de RM y la nota es de 0 a 20. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una nota mayor a 13?.

Resolución:

$\Omega = \{0; 1; 2; ...; 20\} \Rightarrow n(\Omega) = 21$

A : obtener una nota mayor a 13

$A = \{14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\} \Rightarrow n(A) = 7$

$P(A) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

Propiedades

- $0 \leq P(A) \leq 1$
  Probabilidad de un evento seguro: $P(\Omega) = 1$
  Probabilidad de un evento imposible: $P(\varnothing) = 0$
- $P(A^C) = 1 - P(A)$
- Sean A y B eventos cualesquiera:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Observación

- Para dos eventos mutuamente excluyentes se cumple:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Para dos eventos independientes se cumple:

  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$



Probabilidad condicional

Se define a esta probabilidad cuando existe un evento B que ocurre condicionado a que haya ocurrido previamente otro evento A y lo denotaremos por P[B/A].

$$P[B/A] = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo:
Se extrae una bola de un total de 10 (las bolas están numeradas del 1 al 10). ¿Cuál es la probabilidad que dicha bola sea múltiplo de 3, si se sabe que fue par?

Resolución:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \Rightarrow n(\Omega) = 10$

B: múltiplo de 3, $B = \{3; 6; 9\}$

A: sea par, $A = \{2; 4; 6, 8; 10\}$ & $n(A) = 5$

$A \cap B$: sea par y múltiplo de 3, $A \cap B = \{6\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$

$$P[B/A] = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Problemas resueltos

1 La probabilidad que mañana llueva es 0,12; la probabilidad que truene es 0,07 y la probabilidad que llueva y truene es 0,04. ¿Cuál es la probabilidad que llueva o truene ese día?

Resolución:

Evento A: que llueva; $P(A) = 0{,}12$
Evento B: que truene; $P(B) = 0{,}07$
$P(A \cap B) = 0{,}04$
Sabemos que:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}12 + 0{,}07 - 0{,}04$
$\therefore P(A \cup B) = 0{,}15$

2 Una caja contiene 24 bolas numeradas del 1 al 24, ¿cuál es la probabilidad de que, al sacar al azar una bola, resulta par o múltiplo de 5?

Resolución:

$\Omega = \{1; 2; 3; ...; 24\} \Rightarrow n(\Omega) = 24$
A: obtener par
$A = \{2; 4; 6; 8; ...; 24\} \Rightarrow n(A) = 12$
B: obtener múltiplo de 5
$B = \{5; 10; 15; 20\} \Rightarrow n(B) = 4$
$A \cap B = \{10; 20\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$
Luego:
$P(A) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$
$P(B) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
$P(A \cap B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
Sabemos:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$\therefore P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

3 En una urna se tienen 7 bolas azules y 5 bolas blancas, todas del mismo tamaño. Si extraemos 3 bolas, una por una sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea azul; la segunda, blanca y la tercera, azul?

Resolución:

1.ª azul		2.ª blanca		3.ª azul		
↓		↓		↓		
$\frac{7}{12}$	$\times$	$\frac{5}{11}$	$\times$	$\frac{6}{10}$	$=$	$\frac{7}{44}$

4 Se extrae un bolo de un total de 12 (los bolos están numerados del 1 al 12). ¿Cuál es la probabilidad que dicho bolo sea múltiplo de 3, si se sabe que fue par?

Resolución:

Se trata de una probabilidad condicional.
A: extraer bolo con enumeración par
$A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\} \Rightarrow n(A) = 6$
B: extraer bolo con enumeración $\overset{\circ}{3}$
$B = \{3; 6; 9; 12\} \Rightarrow n(B) = 4$
$A \cap B = \{6; 12\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$
Luego:
$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \wedge P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
$\therefore P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

5 Se extrae un bolo de un total de diez (los bolos están numerados del 1 al 10). ¿Cuál es la probabilidad que dicho bolo sea múltiplo de 3, si se sabe que es par?

Resolución:

A: extraer bolo con numeración par
$A = \{2; 4; 6; 8; 10\} \Rightarrow n(A) = 5$
B: extraer bolo con numeración $\overset{\circ}{3}$
$B = \{3; 6; 9\}$
$\Rightarrow A \cap B = \{6\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$
$\Rightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}}$
$\therefore P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{5}$

6 Si se desea escoger entre 4 matemáticos y 7 físicos para formar un comité académico de 4 miembros, halla la probabilidad de seleccionar exactamente 3 matemáticos en tal comité.

Resolución:

Ω = {selección de 4 miembros de las 11 personas}
A = {selección de 4 miembros en los que exactamente hay 3 matemáticos}
$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_3^4 \times C_1^7}{C_4^{11}}$ $\therefore P(A) = \frac{14}{165}$

7 Una bolsa contiene canicas de colores: 5 blancas, 7 negras y 4 rojas. Si todas son de la misma forma, calcula la probabilidad de que al extraer 3 canicas, las 3 sean blancas.

Resolución:

Número de formas que se pueden escoger 3 canicas de un total de 16.

n.° de casos totales $= C_3^{16}$

Número de casos en que se pueden escoger 3 canicas blancas de un total de 5:

n.° de casos totales $= C_3^5$

$$\therefore P = \frac{C_3^5}{C_3^{16}} = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$$

8 Entre 6 tornillos, dos son más cortos que los demás. Si se escogen dos tornillos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos más cortos sean los escogidos?

Resolución:

$$P = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{C_2^2}{C_2^6} = \frac{\frac{2!}{0!2!}}{\frac{6!}{4!2!}}$$

$$P = \frac{1}{15}$$

9 Se tienen bolas numeradas del 1 al 9, se escogen al azar 2 de ellas. Si la suma es par, halla la probabilidad de que ambos números sean impares.

Resolución:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

números impares $= \{1; 3; 5; 7; 9\}$

A: los dos números escogidos sean impares

$$P(A) = \frac{C_2^5}{C_2^9}$$

$$= \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{9!}{7!2!}} = \frac{\frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1}}{\frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2 \times 1}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

10 Se quiere seleccionar un comité de 5 personas a partir de 7 mujeres y 6 varones. ¿Qué probabilidad habría que el comité esté integrado por 2 mujeres?

Resolución:

Se forma grupo de 5 personas de un total de $7 + 6 = 13$

$$n(\Omega) = C_5^{13} = \frac{13!}{8! \times 5!}$$

$$= \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 13 \times 11 \times 9$$

Casos favorables:

$$C_2^7 \times C_3^6$$

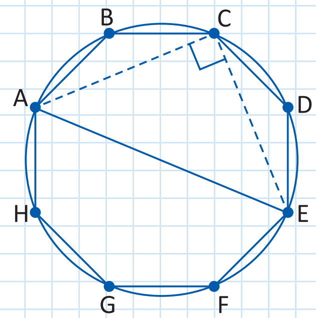
$$\frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{3! \times 3!}$$

$$\frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{6 \times 3!} = 21 \times 20$$

$$P(2 \text{ mujeres y } 3 \text{ varones}) = \frac{21 \times 20}{13 \times 11 \times 9} = \frac{140}{429}$$

11 Se tiene un octagóno regular inscrito en una circunferencia. Si se selecciona aleatoriamente tres vértices de ese octágono, ¿cual será la probabilidad de que ellos determinen un triángulo rectángulo?

Resolución:



Ω: tomar 3 vértices aleatoriamente

$\Rightarrow n(\Omega) = C_3^8$

Para formar un triángulo rectángulo la hipotenusa debe ser el diámetro ($\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$); cada diámetro puede formar 6 triángulos rectángulos:

$$P = \frac{6 \times 4}{C_3^8} \Rightarrow P = \frac{3}{7}$$

Actividades de razonamiento

1. Se lanza simultáneamente 1 moneda y 1 dado. Calcula la probabilidad de obtener una cara y un número par.

A) 1/4 B) 1/3 C) 1/2 D) 3/5 E) 2/5

2. Se lanza 5 veces un dado ¿cuál es la probabilidad de que las 5 caras que aparecen sean diferentes.

A) 4/51 B) 5/56 C) 3/49 D) 3/71 E) 5/54

3. En una urna se tiene fichas numeradas consecutivamente desde 1 hasta 20. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una ficha se obtenga un múltiplo de 3?

A) 0,4 B) 0,3 C) 0,5 D) 0,2 E) 0,5

4. Un artillero dispara a un blanco. Si la probabilidad de acertar un disparo es 0,01, ¿qué probabilidad tiene de no acertar?

A) 0,85 B) 0,96 C) 0,95 D) 0,90 E) 0,99

5. En una caja están contenidas 8 bolas blancas, 11 rojas y 15 azules. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola blanca o una bola roja en un solo intento?

A) 34/15 B) 25/17 C) 18/17 D) 17/92 E) 19/34

6. ¿Cuál es la probabilidad que al lanzar dos dados el número de puntos que muestran sus caras superiores sea mayor que diez?

A) 3/17 B) 1/15 C) 1/12 D) 5/19 E) 2/13

7. Al lanzar dos dados, determina la probabilidad de que la suma de ambos resultados no supere a 10.

A) 7/36 B) 1/6 C) 5/6 D) 2/3 E) 11/12

8. Pablo rinde una práctica calificada y la calificación es de 0 a 20. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga una nota par mayor que 12?

A) 17/23 B) 15/18 C) 7/15 D) 4/21 E) 16/97

9. Al lanzar tres monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de que los tres resultados sean iguales?

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/8 E) 1/10

10. Si se lanza 3 monedas sobre una mesa, ¿cuál es la probabilidad de que se obtengan 2 caras y 1 sello?

A) 3/8 B) 5/7 C) 3/11 D) 16/17 E) 4/15

11. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos veces una moneda se obtenga 2 veces cara?

A) 1/4 B) 1/3 C) 1/8 D) 2/5 E) 3/7

12. De una caja que contiene 4 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes, se extrae al azar una de ellas. Halla la probabilidad de que la bola extraída no sea azul.

A) 1/3 B) 3/4 C) 2/3 D) 2/5 E) 1/5

13. En una urna se tienen 2 esferas rojas y tres blancas. Si se extraen tres esferas una por una y sin reemplazo, halla la probabilidad de que las tres sean blancas.

A) 1/3 B) 1/10 C) 1/8 D) 1/5 E) 7/6

14. De una baraja de 52 cartas se extraen 3 cartas. Calcula la probabilidad de que todos sean ases.

A) 1/5530 B) 1/5525 C) 1/1520 D) 1/1260 E) 1/3725

Claves

1. A	5. E	9. C	13. B
2. E	6. C	10. A	14. B
3. B	7. E	11. A	
4. E	8. D	12. C	

Reto



Halla la probabilidad de obtener al menos una cara al lanzar "n" monedas a la vez.

Rpta.: $1 - \dfrac{1}{2^n}$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par o un múltiplo de 3 al lanzar un dado?

   A) 1/6 B) 1/5 C) 2/5 D) 1/3 E) 2/3

2. Se lanza un par de dados, si la suma es 6. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los dados sea 2?

   A) 1/6 B) 1/4 C) 2/5 D) 2/3 E) 1/3

3. Se lanza un dado; ¿cuál es la probabilidad de obtener un puntaje mayor que 2?

   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

4. Una caja contiene 12 cartas rojas, 6 blancas y 8 negras. Si se saca una sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea roja?

   A) $\frac{12}{20}$ B) $\frac{6}{13}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{9}{13}$ E) $\frac{3}{13}$

5. Se lanza simultáneamente una moneda y un dado. Calcula la probabilidad de obtener una cara y un número par.

   A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

6. Se lanzan 2 monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan dos caras y un número impar?

   A) 0,5 B) 0,125 C) 0,25 D) 0,6 E) 0,111

7. Tres amigos: Walter, Alfredo y Américo intervienen en una prueba. Walter y Américo tienen la misma probabilidad de ganar y es el doble de la que tiene Alfredo. Halla la probabilidad de que gane la prueba Walter o Alfredo.

   A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{25}$

8. Una ficha, cuyas caras están marcadas con los números 3 y 4, es lanzada 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 11?

   A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{8}$

9. Se lanzan 2 dados. Determina la probabilidad que el producto de los puntajes mostrados sea un múltiplo de 3.

   A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{7}{36}$ E) $\frac{5}{36}$

10. En una caja se tiene 50 fichas numeradas del 1 al 50. Si se extrae una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad que sea divisible por 6 u 8?

    A) $\frac{3}{25}$ B) $\frac{8}{25}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{6}{25}$ E) $\frac{3}{10}$

NIVEL 2

11 Se lanzan dos dados, ¿cuál es el número que tiene la mayor probabilidad de ocurrencia?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 12

12 Un aula de clase está formada por 5 estudiantes de primero, 4 de segundo, 8 del penúltimo y 3 del último año, se escoge un estudiante al azar para representar la clase.

Halla la probabilidad de que el estudiante sea:

- Del segundo año.
- Del último año.

A) $\frac{1}{5}; \frac{3}{20}$ B) $\frac{2}{5}; \frac{7}{20}$ C) $\frac{1}{7}; \frac{2}{21}$

D) $\frac{1}{8}; \frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{6}; \frac{3}{17}$

13 Un lote consta de 8 artículos buenos, 3 con pequeños defectos y 5 con defectos graves. Se elige un artículo al azar; ¿cuál es la probabilidad de que dicho artículo no tenga defecto y cuál que tenga un defecto grave?

A) $\frac{8}{15}; \frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}; \frac{5}{16}$ C) $\frac{3}{5}; \frac{3}{8}$

D) $\frac{1}{2}; \frac{5}{24}$ E) $\frac{1}{4}; \frac{5}{8}$

14 Si en una urna tengo 5 fichas numeradas del 1 al 5, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer 2 fichas al azar la suma sea 7?



A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{7}$

15 Diez personas participan en una competencia atlética de 400 metros planos. Si tres de los diez participantes son de una misma delegación, ¿cuál es la probabilidad de que estos ocupen los tres primeros lugares?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{3}{100}$ E) $\frac{1}{120}$

16 Se escribe un número de 2 cifras y se observa que es múltiplo de 5. ¿Cuál es la probabilidad que el número sea múltiplo de 3?

A) $\frac{8}{9}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{7}{9}$ E) $\frac{1}{10}$

17 En una carrera de automóviles, la probabilidad de que el automóvil A gane es 0,5 y la probabilidad de que lo haga el automóvil B es de 2/7. Halla la probabilidad de que A o B ganen la carrera si no hay empates.

A) $\frac{11}{14}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

18. En una caja se tienen dos esferas negras y 5 esferas rojas y en otra caja se tienen 4 esferas rojas y 3 esferas negras. Si se extraen dos esferas, una de cada caja, calcula la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda sea negra.

A) $\frac{8}{7}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{15}{49}$ D) $\frac{7}{49}$ E) $\frac{4}{7}$

19. Se lanza un dado cargado con doble posibilidad de que salgan las caras de puntaje impar respecto a las caras de puntaje par. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un número par o un número mayor a 3?

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{7}$

20. Se tiene un círculo de 8 m de radio. Si ubicamos en la región circular un punto aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que este punto esté más cerca o a igual distancia del centro que la circunferencia?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

NIVEL 3

21. Ocho parejas de novios están reunidos en un local. Si se escogen 2 personas al azar, halla la probabilidad de que uno sea hombre y la otra mujer.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{14}{15}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{15}$

22. En una caja se tienen 20 bolos con numeración consecutiva. Si se extraen 2 bolos al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 bolos con numeración consecutiva?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{10}$

23. La probabilidad de aprobar Matemática I es 0,6 y la probabilidad de aprobar Física I es 0,8. Si se sabe que se aprueba al menos uno de dichos cursos, ¿cuál es la probabilidad de aprobar solo uno de dichos cursos?

A) $\frac{33}{25}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{11}{25}$ D) $\frac{7}{5}$ E) $\frac{4}{25}$

24. Si en una urna tengo 4 fichas numeradas del 1 al 4, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer 2 fichas al azar la suma sea 7?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{7}$

25. Diez personas participan en una competencia atlética de 800 metros planos. Si dos de los diez participantes son de una misma delegación, ¿cuál es la probabilidad de que estos ocupen los dos primeros lugares?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{3}{100}$ E) $\frac{1}{45}$

26. En una caja hay seis cubos iguales: 4 rojos y 2 azules, sacando sin ver, totalmente al azar, cuatro de los seis cubos de una sola vez. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro sean rojos?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{15}$
D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{3}{5}$

27. Ricardo juega a la ruleta con Roberto, y la probabilidad que tiene de ganar una partida es 1/3. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Ricardo de ganar cuando menos una de tres partidas consecutivas?

A) $\frac{19}{27}$ B) $\frac{17}{27}$ C) $\frac{21}{24}$
D) $\frac{11}{27}$ E) $\frac{15}{29}$

28. La probabilidad que tiene Manuel de ganar a Sara una partida de ajedrez es igual a 1/3. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Manuel de ganar por lo menos una de tres partidas?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{19}{27}$
D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{8}{27}$

29. En una urna se tienen 5 esferas rojas, 3 esferas blancas y 4 esferas negras. Si se extraen tres al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos esferas blancas y una negra?



A) $\frac{3}{55}$ B) $\frac{12}{51}$ C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{13}{15}$ E) $\frac{7}{51}$

30. Con 7 médicos y 4 ingenieros se debe formar un comité de 6 miembros, ¿cuál es la probabilidad que el comité incluya al menos dos ingenieros?

A) $\frac{21}{22}$ B) $\frac{23}{66}$ C) $\frac{13}{66}$
D) $\frac{53}{66}$ E) $\frac{1}{66}$

Claves

NIVEL 1
1. E
2. C
3. C
4. B
5. B
6. B
7. C
8. C
9. A
10. D

NIVEL 2
11. C
12. A
13. B
14. B
15. E
16. C
17. A
18. C
19. A
20. B

NIVEL 3
21. C
22. B
23. B
24. B
25. E
26. C
27. A
28. C
29. A
30. D

Lógica proposicional

PROPOSICIÓN LÓGICA

Es el significado de una expresión aseverativa, que se caracteriza por tener un valor veritativo (es decir, el significado tiene la posibilidad de ser verdadero o falso pero no ambos a la vez).
Las proposiciones lógicas se representan mediante letras minúsculas (p; q; r; ...) a las cuales se les denomina **variables proposicionales**.

Ejemplos:
p: (10 – 3) . 2 < 18
q: Lima es una ciudad europea.
r: el río Amazonas pasa por la selva.



Atención

La calificación de verdadera o falsa que recibe una proposición se denomina: **valor de verdad**.

CLASES DE PROPOSICIONES

Proposición simple o atómica

Es aquella proposición con un solo significado, carente de conjunciones gramaticales y del adverbio de negación "NO".

Ejemplos:
- 2 y 3 son números primos.
- El acero es resistente.

Proposición compuesta o molecular

Es aquella que tiene dos o más significados unidas por conjunciones gramaticales o en todo caso contiene el adverbio de negación "NO".

Ejemplos:
- Hoy es lunes y toca Aritmética.
- No es cierto que el perro ladre.

Observación

Existen expresiones que se comportan de manera ambigua, que para ciertos casos adoptan el valor verdadero y para otros el valor falso, denominándolos para ello: enunciados abiertos; los cuales van a depender de una variable expresada en palabra o símbolo matemático.

Ejemplo:
Él es un escritor peruano.

Donde **él** es la variable.

Dando valores.

Albert Einstein es un escritor peruano ...(F)

Ciro Alegría es un escritor peruano. ...(V)



CONECTIVOS LÓGICOS

Son los términos de enlace entre proposiciones lógicas simples. Los conectivos lógicos que más usaremos son los siguientes:

Nombre de la proposición	Término en el lenguaje común	Símbolo	
		Scholz	Russell
Negativa	No es cierto que...	∼	∼
Conjuntiva	... y...	∧	•
Disyuntiva	... o...	∨	∨
Condicional	Si... entonces...	⇒	⊃
Bicondicional	... si y solo si...	⇔	≡

ESQUEMA MOLECULAR

Es una fórmula lógica que resulta de la combinación de variables proposicionales, constantes lógicas y signos de agrupación.
Un esquema molecular posee un correspondiente valor de verdad para los valores dados a cada variable proposicional.

Importante

Si hay cuatro proposiciones, se debe continuar con la secuencia, es decir a la primera variable proposicional le corresponde la mitad de sus valores (V) y la otra mitad (F), a la segunda variable le corresponde la cuarta parte (V), al siguiente cuarto (F), al tercer cuarto (V) y al último cuarto (F); y así sucesivamente hasta la última variable.



El número de resultados en general proviene de las combinaciones de los valores de verdad de cada variable proposicional, a través de una tabla de verdad, si estas fuesen "n" existirán 2^n combinaciones, donde 2 es una constante que representa que cualquier variable puede ser V o F.

n = 1

p
V
F

n = 2

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

n = 3

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

ANÁLISIS DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS

Conjuntiva

Son aquellas proposiciones que se relacionan mediante la conjunción gramatical copulativa "y" o sus expresiones equivalentes.

Ejemplos
- Darwin fue biólogo y Newton físico.
- 19 es impar y además es primo.
- La actriz es bella pero petulante.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Observación

Existen conjunciones implícitas.

Ejemplo:
Luis juega, Carlos lee, Sofía mira .

Cada coma (,) señala una conjunción. También se consideran conjunciones cuando exista punto y coma (;) o un punto seguido (.), siempre que no haya otra expresión que esté señalando otro conectivo.



Disyuntiva

Son aquellas proposiciones que se relacionan mediante la conjunción disyuntiva "o" o sus expresiones equivalentes.
Pueden ser:

A) Inclusiva (débil)

Es aquella en la cual se consideran las posibles ocurrencias simultáneas o individuales de las proposiciones componentes.

Ejemplos:
- Hace frío o está lloviendo.
- 10 es par o múltiplo de 2.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

B) Exclusiva (fuerte)

Esta disyunción excluye la posibilidad de ocurrencia simultánea de ambas proposiciones componentes.

Ejemplos:
- O viajas por tierra o por aire.
- O es blanco o es negro

p	q	$p \triangle q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional

Son aquellas proposiciones que se relacionan mediante la conjunción condicional "si... entonces..." o sus expresiones equivalentes.

Ejemplos:
- Si estudias entonces ingresarás.
- Si llueve entonces me mojaré.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

Son aquellas proposiciones que se relacionan mediante la conjunción compuesta "si y solo si" o sus expresiones equivalentes.

Ejemplos:
- 11 es primo si y solo si tiene 2 divisores.
- Es un cuadrilátero si y solo si tiene 4 lados.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Negativa

Son aquellas expresiones que hacen uso del adverbio negativo "no" o sus expresiones equivalentes.

Ejemplos:
- La filosofía no es una ciencia.
- No es posible que existan los marcianos.

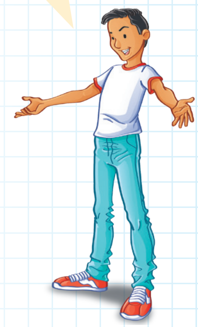
p	$\sim p$
V	F
F	V

Observación

Una condicional puede utilizar otras palabras que unan las proposiciones.

Ejemplos:

... de allí que...
... en consecuencia...
... por lo tanto...
... en conclusión...
... luego...



EVALUACIÓN DE ESQUEMAS MOLECULARES

Consiste en obtener el valor o los valores del conectivo lógico de mayor jerarquía a partir de los valores veritativos de cada una de las variables proposicionales.

Ejemplos:

1. Si: $p \equiv V;\ q \equiv F\ ;\ r \equiv V$

   Determina el valor de verdad del siguiente esquema molecular:

   $\sim[p \Rightarrow (q \,\Delta \sim p)] \Rightarrow [\sim r \wedge (p \Leftrightarrow q)]$

   Resolución:

   $\sim[p \Rightarrow (q \,\Delta \sim p)] \Rightarrow [\sim r \wedge (p \Leftrightarrow q)]$

   $\sim[V \Rightarrow (F \,\Delta\, F)] \quad \Rightarrow [\ F \wedge (V \Leftrightarrow F)]$

   $\sim[V \Rightarrow \quad F] \quad \Rightarrow \quad F \wedge \quad F$

   $\sim F \qquad\qquad F$

   $V \qquad \Rightarrow \qquad F$

   F

2. Evalúa el siguiente esquema:

   $(p \wedge \sim q) \vee (q \Rightarrow p)$

   Resolución:

p	q	(p	∧	~q)	∨	(q	⇒	p)
V	V	V	F	F	V		V	
V	F	V	V	V	V		V	
F	V	F	F	F	F		F	
F	F	F	F	V	V		V	

Matriz principal

Nota

Según la distribución de los valores veritativos asociados a la matriz principal en la tabla de verdad de un esquema molecular, este puede ser:
- Tautológico: si solo hay valores verdaderos.
- Contradictorio: si solo hay valores falsos.
- Contingente: si contiene valores verdaderos y falsos.

LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

1. Idempotencia

$p \wedge p \equiv p$

$p \vee p \equiv p$

2. Conmutativa

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$

$p \,\Delta\, q \equiv q \,\Delta\, p$

3. Asociativa

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \equiv p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$

4. Distributiva

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

5. De Morgan

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

6. Del complemento

$p \vee \sim p \equiv V$

$p \wedge \sim p \equiv F$

$\sim(\sim p) \equiv p$

7. De la identidad

$p \vee V \equiv V \quad p \vee F \equiv p$

$p \wedge V \equiv p \quad p \wedge F \equiv F$

8. De la condicional

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

9. De la bicondicional

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$p \Leftrightarrow q \equiv \sim(p \,\Delta\, q)$

10. De absorción

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

Ejemplo: simplifica la proposición: $\sim(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim q$

Resolución:

$\sim(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim q$

$\sim[\sim(p \vee \sim q)] \vee \sim q$ ... Ley de la condicional

$(p \vee \sim q) \vee \sim q$ ... Ley de complemento

$p \vee (\sim q \vee \sim q)$ ... Ley del asociativa

$p \vee \sim q$ ... Ley de idempotencia

$\sim q \vee p$ ... Ley conmutativa

$q \Rightarrow p$ ... Ley de la condicional

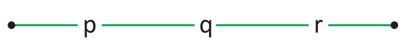
$\therefore \sim(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim q \equiv q \Rightarrow p$

CIRCUITOS LÓGICOS

Un circuito lógico es la representación gráfica de una o más proposiciones, utilizando los esquemas denominados circuitos eléctricos.
Según la disposición de los interruptores en un circuito, se tienen dos tipos:

Circuito en serie

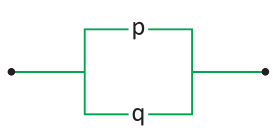
Es aquel que está constituido por interruptores uno detrás de otro.

- $p \wedge q$ se representa: 
- $p \wedge q \wedge r$ se representa: 

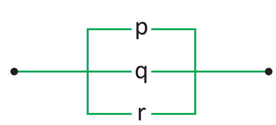
Circuito en paralelo

Es aquel que está constituido por interruptores uno al lado del otro.

- $p \vee q$ se representa:



- $p \vee q \vee r$ se representa:



Recuerda

Implicación lógica: es aquella condicional que resultar ser una tautología.

Equivalencia lógica: es aquella bicondicional que resulta ser una tautología.



Nota

La demostración de estas leyes es bien sencilla, solo basta utilizar las tablas de verdad.

Ejemplo:
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

p	q	p ⇒ q	~p	∨	q
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F

Se observa que los elementos de la matriz principal son idénticos.
$\therefore p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$



Atención

Según se observa, los esquemas moleculares que pueden ser representados por circuitos lógicos son los conjuntivos y disyuntivos, luego, los esquemas condicionales o bicondicionales deben ser transformados a esquemas conjuntivos o disyuntivos, mediante la aplicación de las leyes del álgebra proposicional.

Problemas resueltos

1 Determina la tabla de verdad de la siguiente proposición:
$(q \Rightarrow \sim r) \vee (\sim p \wedge r)$

Resolución:

Elaboramos la tabla de verdad:

p	q	r	(q	⇒	~r)	∨	(~p	∧	r)
V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	F	V	V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	F	F

2 Evalúa la proposición y establece si se trata de una tautología, contradicción o contingencia.
$[(\sim p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee r]$

Resolución:

Elaboramos la tabla de verdad:

p	q	r	[(~p	∨	q)	⇒	r]	⇔	[(p	∧	~q)	∨	r]
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F	F	V	F	F	V	F	F

∴ El esquema resulta ser una tautología.

3 Sabiendo que la proposición:
$[(p \wedge q) \wedge \sim r] \Rightarrow (s \vee \sim t)$ es falsa.
Halla los valores de p; q; r; s y t.

Resolución:

$[(p \wedge q) \wedge \sim r] \Rightarrow (s \vee \sim t) \equiv F$
La condicional es falsa solo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Luego:

- $[(p \wedge q) \wedge \sim r] \equiv V$
  La conjunción es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas.
  Entonces:
  $(p \wedge q) \equiv V \; ; \; \sim r \equiv V$
  V V F
- $(s \vee \sim t) \equiv F$
  La disyunción débil es falsa cuando ambas proposiciones son falsas.
  Entonces:
  $s \equiv F \; ; \; \sim t \equiv F$
  V

∴ $p \equiv V ; \; q \equiv V ; r \equiv F ; s \equiv F; t \equiv F$

4 Si las siguientes proposiciones: $p \vee \sim q$ y $q \wedge p$ son verdadera y falsa respectivamente.

Determina los valores de verdad de:

I. $(q \Rightarrow p) \wedge \sim(q \Rightarrow \sim p)$
II. $(q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
III. $\sim[\sim p \wedge \sim q] \Leftrightarrow (p \vee q)$

Resolución:

$p \vee \sim q \equiv V; \; q \wedge p \equiv F$

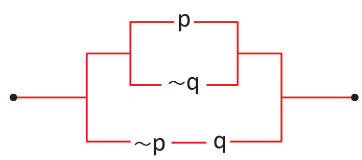
I. $(q \Rightarrow p) \wedge \sim(q \Rightarrow \sim p)$
$(\sim q \vee p) \wedge \sim(\sim q \vee \sim p)$
$(p \vee \sim q) \wedge (q \wedge p)$
V ∧ F ≡ F

II. $(q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
$(\sim q \vee \sim p) \Rightarrow (\sim q \vee p)$
$\sim(q \wedge p) \Rightarrow (p \vee \sim q)$
V ⇒ V ≡ V

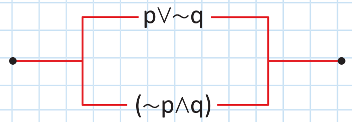
III. $\sim[\sim p \wedge \sim q] \Leftrightarrow (p \vee q)$
$[p \vee q] \Leftrightarrow (p \vee q) \equiv V$

∴ Los valores de verdad son FVV

5 Evalúa la tabla de verdad luego de representar el circuito:



Resolución:

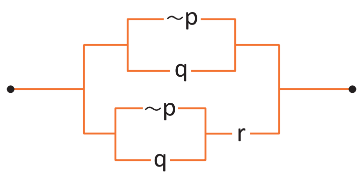


Luego: $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

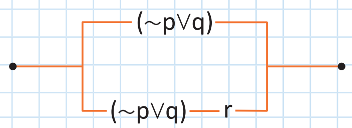
Elaboramos la tabla de verdad:

p	q	(p	∨	~q)	∨	(~p	∧	q)
V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F

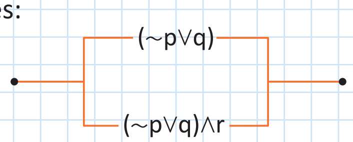
6 Halla la fórmula del siguiente circuito:



Resolución:



Entonces:



Luego: $(\sim p \vee q) \vee [(\sim p \vee q) \wedge r]$

$\equiv (\sim p \vee q)$

$\equiv p \Rightarrow q$

7 Simplifica:

$\sim[\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim q]$

Resolución:

$\sim[\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim q]$

$\equiv \sim[\sim\{\sim(p \wedge q)\} \vee \sim q]$

$\equiv \sim[(p \wedge q) \vee \sim q]$

$\equiv \sim[(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q)]$

$\equiv \sim[(p \vee \sim q) \wedge V]$

$\equiv \sim[p \vee \sim q]$

$\equiv \sim p \wedge q$

8 Simplifica:

$\sim\{\sim[\sim(\sim p \wedge q) \vee \sim q] \Rightarrow [\sim(p \vee \sim q)]\}$

Resolución:

$\sim\{\sim[\sim(\sim p \wedge q) \vee \sim q] \Rightarrow [\sim(p \vee \sim q)]\}$

$\equiv \sim\{\sim[(p \vee \sim q) \vee \sim q] \Rightarrow [\sim p \wedge q]\}$

$\equiv \sim\{\sim[p \vee (\sim q \vee \sim q)] \Rightarrow [\sim p \wedge q]\}$

$\equiv \sim\{\sim[p \vee \sim q] \Rightarrow [\sim p \wedge q]\}$

$\equiv \sim\{[\sim p \wedge q] \Rightarrow [\sim p \wedge q]\}$

$\equiv \sim\{V\}$

$\equiv F$

9 Simboliza:

Carlos no baila o canta. Si Carlos juega entonces no canta. En consecuencia no baila ya que juega.

Resolución:

p: Carlos baila.
q: Carlos juega.
r: Carlos canta.

Luego:
$[(\sim p \vee r) \wedge (q \Rightarrow \sim r)] \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)$

10 Simboliza:

si José va al colegio, no está triste. No está triste porque no llora. Por lo tanto no llora cuando va al colegio.

Resolución:

p: José va al colegio.
q: José está triste.
r: José llora.

Luego:
$[(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow (p \Rightarrow \sim r)$

11 Halla una proposición equivalente a: "No es cierto que Susan postuló a la UNI o a San Marcos".

Resolución:

p: Susan postuló a la UNI.
q: Susan postuló a San Marcos.

Luego: $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

∴ Una proposición equivalente sería: Susan no postuló a la UNI ni a San Marcos.

Actividades de razonamiento

1. Halla la matriz principal del siguiente esquema:
$(p \Rightarrow q) \wedge (p \,\Delta\, \sim q)$

A) VVVF B) VFFV C) FFFF
D) FFVV E) VFFF

2. Halla la diferencia entre la cantidad de verdades y falsedades de la proposición:
$[(p \vee q) \wedge r] \wedge (\sim q \wedge r)$

A) 8 B) 6 C) 2 D) 0 E) 4

3. Se sabe que: $p \wedge q$ y $q \Rightarrow t$ son falsas, halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(\sim p \vee t) \vee \sim q$
II. $\sim[p \wedge (\sim t \vee \sim p)] \wedge (\sim p \vee \sim q)$
III. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim(q \wedge t)] \Leftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge \sim t)]$

A) VVF B) VFF C) VVV D) FFV E) VFV

4. De las siguientes proposiciones. ¿Cuáles son tautologías?
I. $\{\sim[\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim q] \vee q\} \vee \sim q$
II. $[(p \vee \sim q) \wedge q] \Rightarrow p$
III. $\sim[(\sim p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)]$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

5. Sea:
T: tautología
C: contradicción
G: contingencia
Entonces, los siguientes esquemas:
I. $(p \,\Delta\, q) \Leftrightarrow (q \,\Delta\, \sim p)$
II. $[p \,\Delta\, (p \vee q)] \,\Delta\, (\sim q \vee p)$
III. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
Son respectivamente:

A) TGC B) CTG C) GCT D) CGT E) TCG

6. Halla el valor de verdad de p; q; r si se sabe que:
$\sim[(\sim p \vee q) \vee (r \Rightarrow q)] \wedge [(\sim p \vee q) \Rightarrow (q \wedge \sim p)]$
es verdadera.

A) VFV B) FVF C) VVF D) FVV E) VVV

7. Si la proposición:
$(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow \sim s)$ es falsa.
Da el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $\sim(p \vee q) \vee \sim q$
- $[(r \Rightarrow q) \wedge q] \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
- $\sim[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$

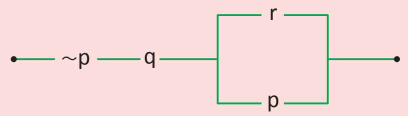
A) VVV B) FVV C) VFV D) VFF E) VVF

8. Si la proposición:
$\sim[(q \Rightarrow s) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ es verdadera.
Determina el valor de verdad de:

- $(\sim s \Rightarrow \sim q) \,\Delta\, (r \Rightarrow p)$
- $\sim(q \wedge \sim s) \wedge (p \wedge \sim r)$
- $(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \Leftrightarrow r)$

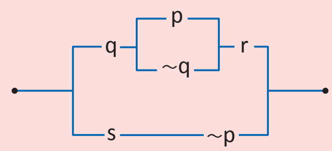
A) VFV B) FVV C) FFV D) FFF E) FVF

9. Halla la fórmula del siguiente circuito:



A) (~p ∨ q) ∨ (r ∧ p)
B) (~p ∧ q) ∧ (r ∨ p)
C) (p ∧ q) ∧ (r ∨ p)
D) ~p ∧ [q ∨ (r ∧ p)]
E) (~p ∧ q) ∨ r

10. Halla la fórmula del siguiente circuito.



A) [(p ∨ ~q) ∧ (q ∧ r)] ∨ (s ∧ ~p)
B) (q ∧ r ∧ s ∧ ~p) ∨ (p ∨ ~q)
C) (r ∧ ~p) ∨ [q ∧ (p ∨ q) ∧ s]
D) [(p ∨ ~q) ∧ s] ∨ r
E) {[q ∧ (~p ⇒ ~q)] ∧ r} ∨ (s ∨ ~p)

11. Simplifica:
[(~p ∧ q) ⇒ (r ∧ ~r)] ∧ ~q

A) p B) q C) ~q D) ~p E) p ∨ q

12. Simplifica:
t ⇒ {[(p ⇒ q) ⇒ q] ∧ [~p ∧ (q ⇒ p)]}

A) p ∨ q B) ~p C) t D) ~t E) ~q

13. Simboliza:
Raúl no es deportista porque no entrena. Entonces es deportista si entrena.

A) (~q ⇒ p) ⇒ (q ⇒ p)
B) (~q ⇒ p) ⇒ (p ⇒ q)
C) (~q ⇒ ~p) ⇒ (p ⇒ q)
D) (q ⇒ ~p) ⇒ (p ⇒ q)
E) (~q ⇒ ~p) ⇒ (q ⇒ p)

14. Simboliza:
Si duermo, no estudio. No apruebo si no estudio. En consecuencia no apruebo si duermo.

A) [(~p ⇒ q) ∨ (~q ⇒ ~r)] ⇒ (p ⇒ r)
B) [(p ⇒ ~q) ∧ (~q ⇒ ~r)] ⇒ (p ⇒ ~r)
C) [(p ⇒ q) ∧ (q ⇒ ~r)] ⇒ (p ⇒ ~r)
D) [(q ⇒ p) ∧ (~q ⇒ ~r)] ⇒ (r ⇒ p)
E) [(q ⇒ p) ∨ (~ ⇒ r)] ∧ (r ⇒ p)

Claves

1. B
2. E
3. C
4. D
5. B
6. A
7. C
8. E
9. B
10. A
11. C
12. D
13. E
14. B

Reto



Simplifica a su mínima expresión:
{[(p ⇒ q) ∨ ~p] ∧ (~p ⇒ p)} ∧ [q ∨ (r ∧ s)]

Rpta.: p ∧ q

Refuerza practicando

NIVEL 1

Halla la tabla de verdad de los siguientes esquemas moleculares e indica el resultado de la matriz principal.

1. $(p \wedge q) \Rightarrow p$

A) FVFV B) VVVV C) VFVF
D) FFFF E) VVFF

2. $(p \Leftrightarrow \sim q) \wedge (p \vee \sim q)$

A) FVFF B) VVFF C) FVVF
D) FFVV E) FFFV

3. $(p \Leftrightarrow \sim q) \vee (p \vee \sim q)$

A) FFVF B) VFVF C) FFVV
D) FVFV E) VVVV

4. $(p \Rightarrow \sim q) \vee (p \vee \sim q)$

A) VVFF B) FFVV C) VVVV
D) FVFV E) VFVF

5. $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

A) VFVF B) FFVV C) VVFF
D) VVVV E) FVFV

Evalúa las siguientes fórmulas lógicas e indica el tipo de esquema molecular.

6. $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$

A) Tautología B) Contingencia
C) Contradicción D) Conjunción
E) Condicional

7. $[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$

A) Contingencia B) Tautología
C) Contradicción D) Conjunción
E) Condicional

8. $(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow q)$

A) Conjunción B) Contradicción
C) Tautología D) Contingencia
E) Condicional

9. $(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

A) Conjunción B) Contingencia
C) Contradicción D) Condicional
E) Tautología

10. $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q)$

A) Contingencia B) Tautología
C) Contradicción D) Conjunción
E) Condicional

NIVEL 2

Si la proposición: $(\sim p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow \sim s) \equiv F$
Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

(11) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$

A) Falta r B) Falso C) Verdadero
D) Falta q E) Falta p

(12) $(\sim r \vee q) \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$

A) Falta q B) Falta p C) Falta s
D) Falso E) Verdadero

(13) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

A) Falta r B) Falta p C) Falta q
D) Verdadero E) Falso

Dada la proposición: $\sim[(r \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow p)] \equiv V$, donde se sabe que "q" es una proposición falsa. Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(14) $r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

A) Falta p B) Falta q C) Verdadero
D) Falta r E) Falso

(15) $[r \Leftrightarrow (p \wedge q)] \Leftrightarrow (q \wedge \sim p)$

A) Falta q B) Falta r C) Falso
D) Falta p E) Verdadero

(16) $(r \vee \sim p) \wedge (q \vee p)$

A) Falso B) Verdadero C) Falta q
D) Falta s E) Falta r

(17) Simplifica: $(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

A) $\sim p$ B) $p \wedge q$ C) $p \vee q$
D) $p \Rightarrow q$ E) $\sim q$

(18) Simplifica: $(p \Rightarrow \sim q) \wedge [(q \Rightarrow \sim p) \vee (q \Rightarrow \sim r)]$

A) $p \wedge q$ B) $\sim p \vee \sim q$ C) $p \Rightarrow q$
D) p E) $\sim q$

(19) Simplifica: $\sim\{[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \,\Delta\, [(q \wedge \sim p) \vee \sim(p \vee r)]\}$

A) $\sim p$ B) $p \wedge q$ C) $p \vee q$
D) Verdadero E) $\sim q$

(20) Si la proposición: $[(\sim p \vee q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)] \vee (q \wedge s) \equiv F$, siendo p una proposición verdadera, determina los valores de verdad de q, r y s en ese orden.

A) FFF B) VVV C) FVF
D) VFV E) VFF

NIVEL 3

Simboliza las siguientes proposiciones.

(21) Las brujas se peinan únicamente si llueve y hace sol.

A) $p \Rightarrow (q \wedge r)$ B) $p \Leftrightarrow (q \vee r)$
C) $r \Leftrightarrow (p \wedge q)$ D) $q \Leftrightarrow (r \vee p)$
E) $p \wedge \sim q$

(22) Cuando las brujas no se peinan, no llueve o no hace sol.

A) $\sim r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ B) $\sim r \Rightarrow (p \vee q)$
C) $r \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ D) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
E) $r \Rightarrow p$

(23) Los planetas reflejan luz si y solo si las estrellas la emiten y los planetas giran alrededor de ellas.

A) $p \Rightarrow (r \wedge q)$ B) $p \Leftrightarrow r$
C) $p \Leftrightarrow r$ D) $q \Leftrightarrow (p \wedge r)$
E) $(p \wedge q) \Leftrightarrow r$

(24) Si no es cierto que las estrellas emiten luz y que los planetas la reflejan, entonces estos no giran alrededor de ellas.

A) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$ B) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
C) $(p \vee q) \Rightarrow \sim r$ D) $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim r$
E) $(p \vee r) \Rightarrow q$

(25) Si no es el caso que Pablo atiende en clase y estudia en casa, entonces fracasará en los exámenes o no será aplaudido.

A) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim(r \vee s)$ B) $\sim(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \sim s)$
C) $(r \vee \sim s) \Rightarrow (p \wedge q)$ D) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$
E) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee \sim s)$

(26) Si un triángulo tiene tres ángulos, un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos. Los triángulos tienen tres ángulos y la suma de sus medidas es igual a la suma de dos ángulos rectos. Un cuadrado no tiene cuatro ángulos rectos si los rombos tienen cuatro ángulos rectos. Por tanto, los rombos no tienen cuatro ángulos rectos.

A) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge r)] \Rightarrow s$

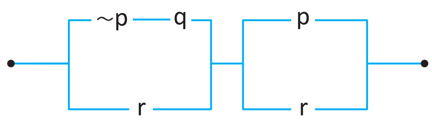
B) $[(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge r)] \Rightarrow \sim s$

C) $[(p \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim s$

D) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge r) \wedge (s \Rightarrow \sim q)]$

E) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge r) \wedge (s \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim s$

(27) Dado el siguiente circuito:



Su equivalente es:

A) [(~p ∧ q) ∨ r] ∨ (p ∨ r)

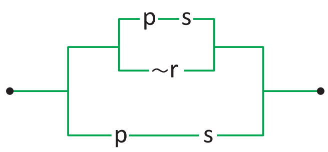
B) [(~p ∧ q) ∨ r] ∧ (p ∧ r)

C) [(~p ∧ q) ∧ r] ∧ (p ∨ r)

D) [(~p ∨ q) ∨ r] ∧ (p ∨ r)

E) [(~p ∧ q) ∨ r] ∧ (p ∨ r)

(28) Dado el siguiente circuito:



Su equivalente es:

A) [(p ∧ s) ∨ ~r] ∨ (p ∨ s)

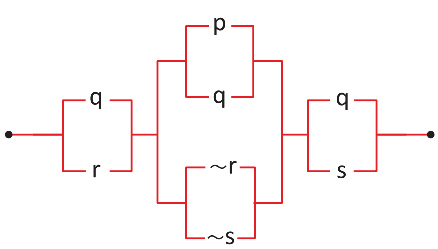
B) [(p ∧ s) ∨ ~r] ∧ (p ∧ s)

C) [(p ∧ s) ∧ ~r] ∨ (p ∧ s)

D) [(p ∧ s) ∨ ~r] ∨ (p ∧ s)

E) [(p ∨ s) ∨ ~r] ∨ (p ∧ s)

(29) Dado el siguiente circuito:



Su equivalente es:

A) [q ∨ r] ∧ [(p ∨ q) ∨ (~r ∧ ~s)] ∧ (q ∨ s)

B) [q ∨ r] ∧ [(p ∨ q) ∨ (~r ∨ ~s)] ∧ (q ∨ s)

C) [q ∧ r] ∧ [(p ∨ q) ∨ (~r ∨ ~s)] ∧ (q ∨ s)

D) [q ∨ r] ∧ [(p ∧ q) ∨ (~r ∨ ~s)] ∧ (q ∨ s)

E) [q ∨ r] ∧ [(p ∨ q) ∧ (~r ∨ ~s)] ∧ (q ∨ s)

(30) Se define el operador lógico Φ, según la siguiente tabla de verdad:

p	q	q Φ p
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Entonces, al simplificar la siguiente fórmula lógica:
(p Φ q) Φ [(~q ∨ p) Φ (p ⇒ q)] se obtiene:

A) p ∨ q B) p ⇒ q C) ~p
D) Verdadero E) Falso

Claves

NIVEL 1
1. B
2. A
3. E
4. C
5. D
6. A
7. C
8. D
9. E
10. B

NIVEL 2
11. C
12. D
13. E
14. C
15. E
16. A
17. A
18. B
19. D
20. E

NIVEL 3
21. C
22. A
23. D
24. A
25. E
26. E
27. E
28. D
29. B
30. E

Psicotécnico

DEFINICIÓN

Es un test psicométrico que permite evaluar de manera objetiva determinadas capacidades, vinculadas a diferentes áreas.
Además, existe una gran variedad de test que son específicos para cada una de las capacidades que se quiera medir.

TIPOS DE TEST

Test de razonamiento verbal

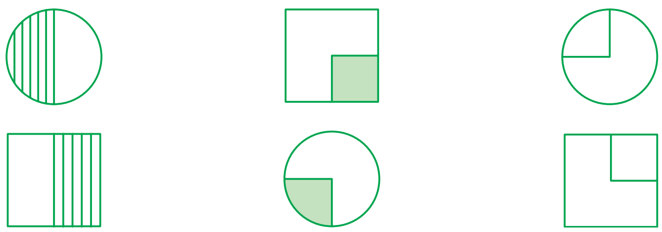
Ejemplo:

... es a BLANCURA como TINTA es a ...

A) NIEVE - BLANCURA
B) LECHE - NEGRURA
C) VINO - ESCRITURA
D) MANCHA - PLUMA

Test de razonamiento no verbal o de figuras

Ejemplo:



Test de razonamiento numérico

Ejemplo:
Del siguiente cuadro, ¿en qué año aumentaron las exportaciones rusas en una mayor proporción con respecto al año anterior?

	2004	2005	2006	2007
Rusia	46,0	56,7	72,3	105,2
Suiza	75,2	82,6	87,7	92,9
Noruega	30,8	33,8	38,5	43,6

Exportaciones (1000 millones de euros)

Test de memoria

Ejemplo:
Tacha las cifras 8 y 6 lo más rápido posible.

4	3	2	7	10
1	4	5	6	9
6	7	8	3	4
3	2	11	4	1
14	3	8	7	20

Atención

Para poder superar con satisfacción los tests:

- Es conveniente practicar y generar hábito para poder resolverlos más rápido.
- Considera un factor clave: **el tiempo**.





Recuerda

- Debes leer atentamente las indicaciones y consultar tus dudas.
- En caso de no saber la respuesta de una pregunta es conveniente continuar con la siguiente dejando esa en blanco.



Importante

Este tipo de ejercicios se usan para la selección de personal y pruebas de ingreso a las universidades.

Problemas resueltos

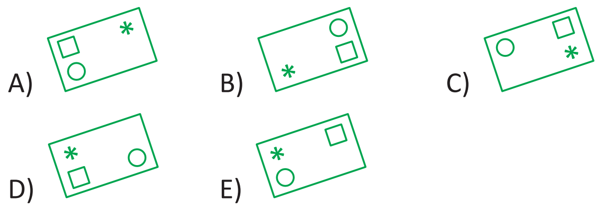
1 HOMBRO es a BRAZO como CADERA es a:

A) Codo B) Tobillo C) Pierna
D) Tronco E) Pie

Resolución:

Notamos que son partes del cuerpo. El hombro es el inicio del brazo y la cadera es el inicio de la pierna. La respuesta es la clave C.

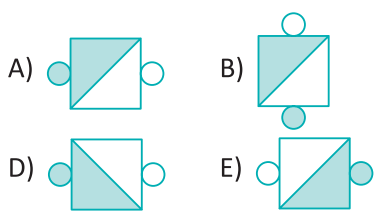
2 La figura que no corresponde es:



Resolución:

Lo que caracteriza a cada figura es el orden del círculo - cuadrado - asterisco - vacío.
No se cumple en la clave E.

3 ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



Resolución:

Los partes sombreados están juntos en cada figura, excepto en la figura B.

4 Las dos terceras pates del peso de una tostada integral de 12 gramos están constituidos por carbohidratos. Si en el desayuno consumo 6 tostadas integrales. ¿Cuántos gramos de carbohidratos habré ingerido?

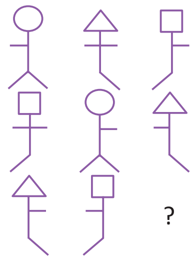
A) 48 B) 24 C) 36 D) 45 E) 60

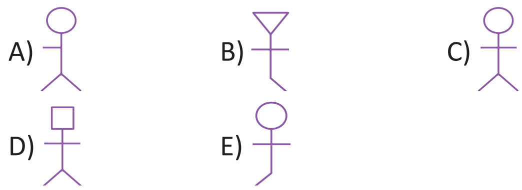
Resolución:

$\frac{2}{3}(12\text{ gr}) \Rightarrow$ carbohidratos/tostada $= 8$ g

1 tostada $\longrightarrow$ 8 g $\quad\Rightarrow\quad$ x = 8 . 6 g
6 tostadas $\longrightarrow$ x $\quad\quad\quad$ x = 48 g $\quad$ Clave A

5 Halla la figura que corresponda:

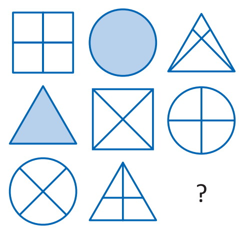


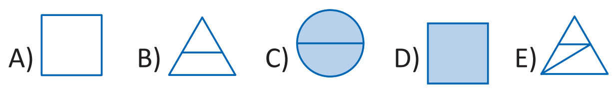


Resolución:

La respuesta es la C, pues en todas las filas siempre hay cabezas, triángulo, círculo, cuadrado y en las patitas hay; izquierda, derecha y las dos.

6 Halla la figura que falta.

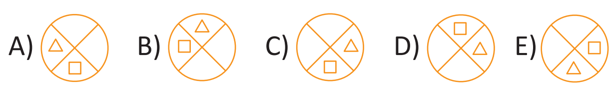




Resolución:

En cada fila y en cada columna hay un cuadrado, un triángulo y un círculo, entonces en la posición que falta debe ir un cuadrado. Además la figura deberá ir sombreada. La respuesta es la D.

7 Halla la figura que no corresponde con las otras.

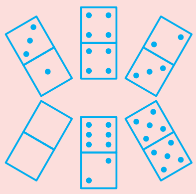


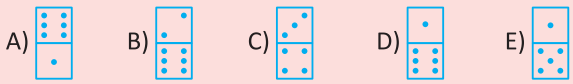
Resolución:

El cuadradito se ubica siempre a la derecha del triangulito, excepto en la opción C en la cual el cuadradito está a la izquierda.

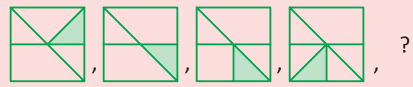
Actividades de razonamiento

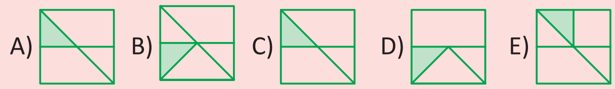
1. Halla la figura que corresponde.



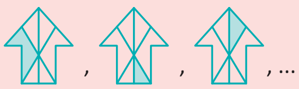


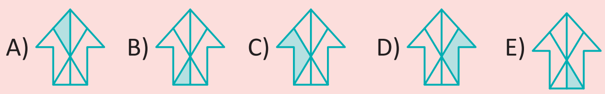
2. Halla la figura que continúa.



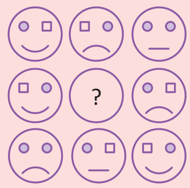


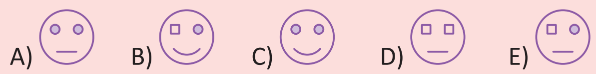
3. Determina la figura que continúa:



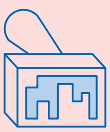


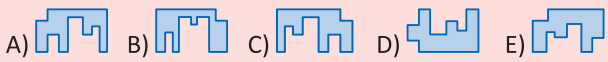
4. Halla la figura que falta.



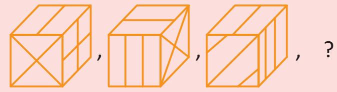


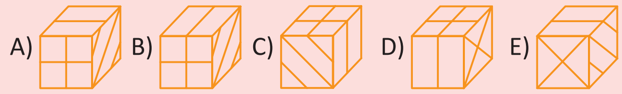
5. ¿Qué figura se obtiene al presionar el sello en un papel?



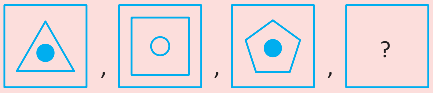


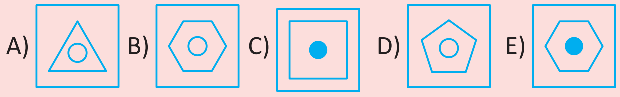
6. Halla la figura que continúa:



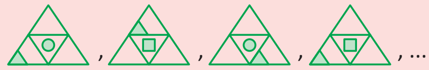


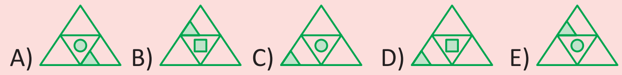
7. Señala la figura que completa la serie:



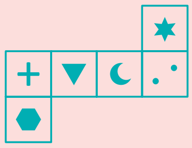


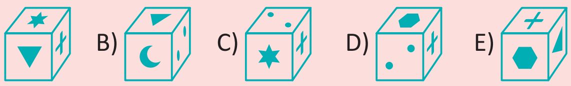
8. ¿Qué figura sigue?



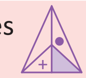


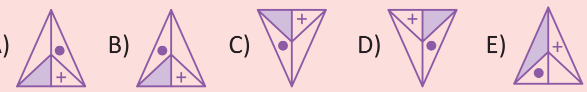
9. ¿Cuál de las cinco figuras puede ser hecha con el siguiente molde?





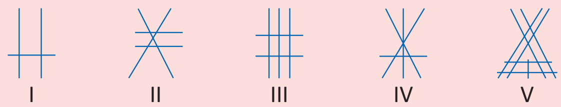
A) B) C) D) E)

10. Si  es a , entonces  es a:

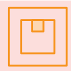


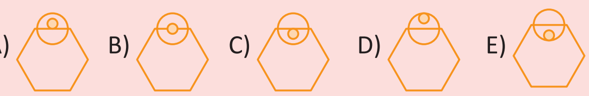
A) B) C) D) E)

11. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



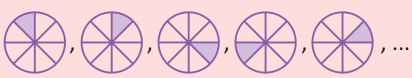
A) I B) II C) III D) IV E) V

12. Si  es a , entonces  es a:



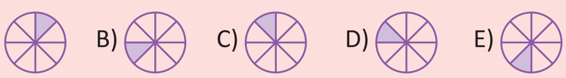
A) B) C) D) E)

13. Indica la figura que continúa en:



A) B) C) D) E)

14. ¿Qué alternativa debe reemplazar el signo de interrogación?



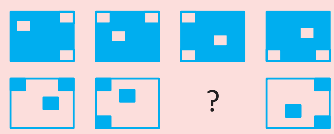
A) B) C) D) E)

Claves

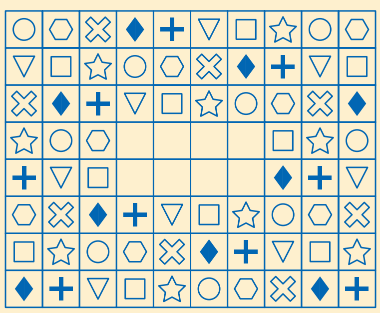
1. D
2. B
3. C
4. A
5. C
6. A
7. B
8. E
9. E
10. C
11. D
12. C
13. D
14. D

Reto

¿Cómo sería el panel que va en la parte central?



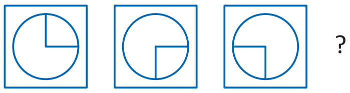


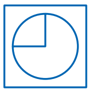
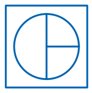
Rpta.: 

Refuerza practicando

NIVEL 1

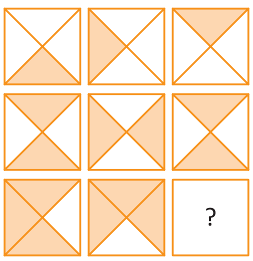
1. ¿Qué figura continua?

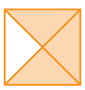
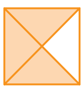
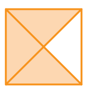


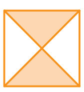
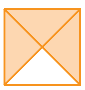
A)  B)  C) 

D)  E) 

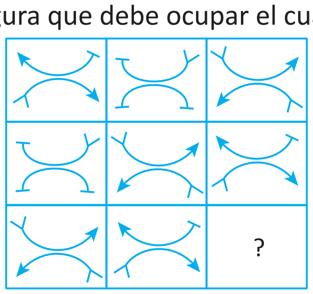
2. Señala la figura que debe ocupar el cuadro vacío.

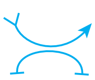
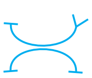
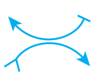


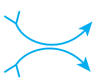
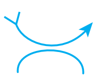
A)  B)  C) 

D)  E) 

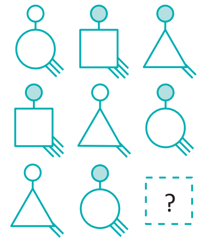
3. Señala la figura que debe ocupar el cuadro vacío:

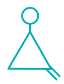
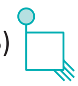
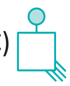
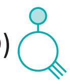
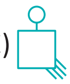


A)  B)  C) 

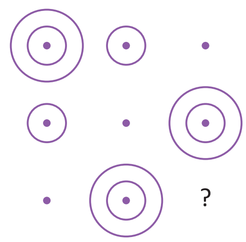
D)  E) 

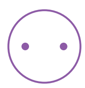
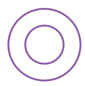
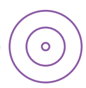
4. ¿Qué figura falta?



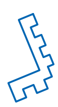
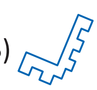
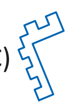
A)  B)  C)  D)  E) 

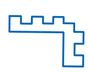
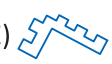
5. ¿Qué figura debe reemplazar el signo de interrogación?



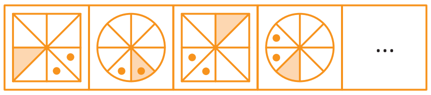
A)  B)  C)  D)  E) 

6. Indica la figura que no tenga relación con las demás.

A)  B)  C) 

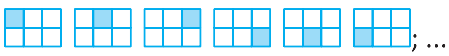
D)  E) 

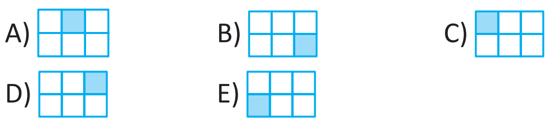
7. ¿Qué figura continúa?



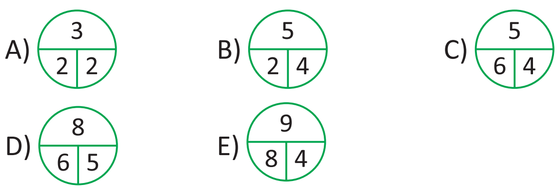


8. La figura que continúa en la sucesión es:





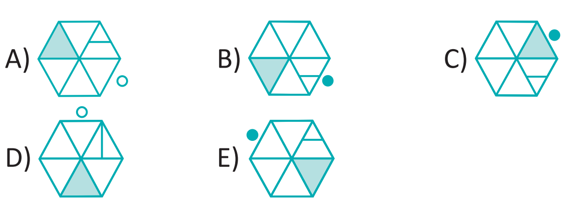
9. Una de las siguientes figuras no guarda relación con las demás:



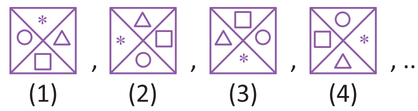
NIVEL 2

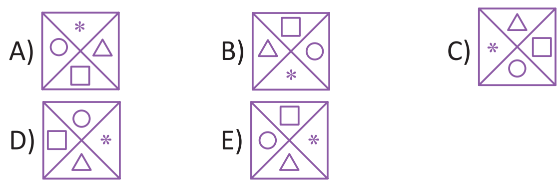
10. Determina la figura que continúa en:



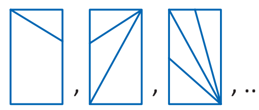


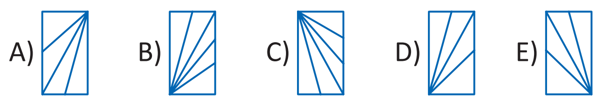
11. Halla la figura que se encuentra en la posición (83).



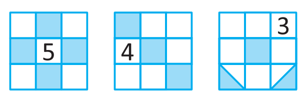


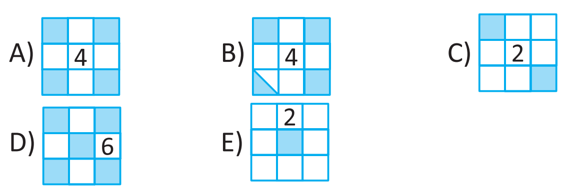
12. ¿Qué figura continúa en la sucesión?



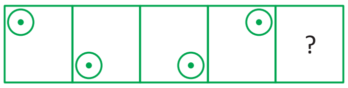


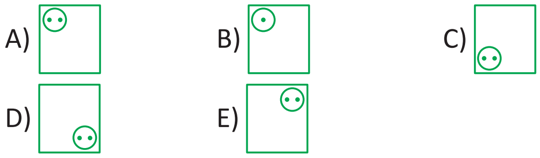
13. Halla la figura que completa mejor la secuencia.



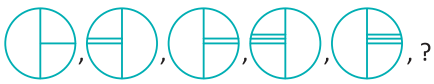


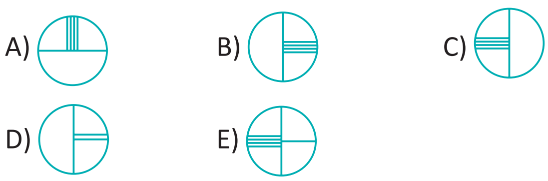
14. Halla la figura que continúa:



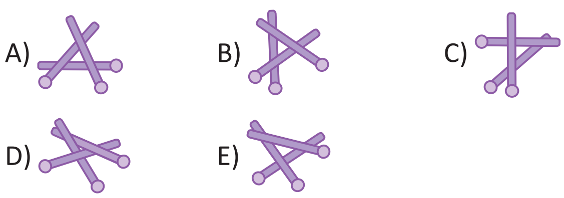


15. ¿Qué figura continúa?

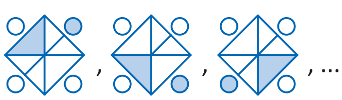


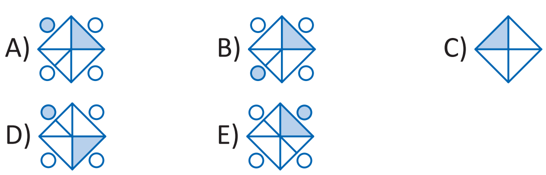


16. ¿Qué figura no se relaciona con las demás?



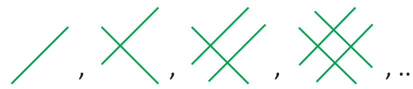
17. Determina la figura que continúa en:

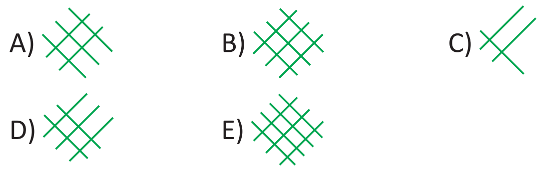




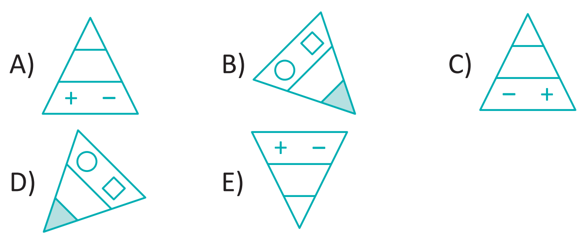
NIVEL 3

18. ¿Qué figura continúa?

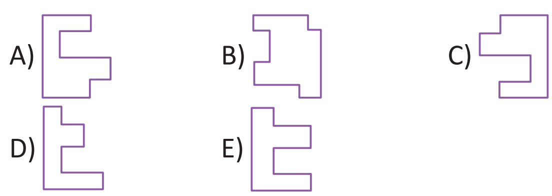




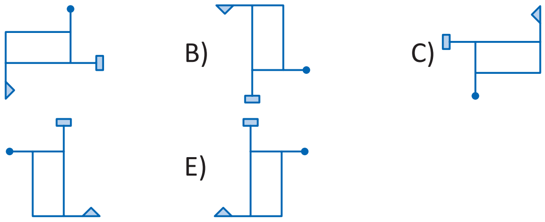
19. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



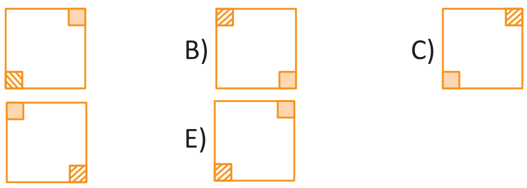
20. Halla la figura que no guarda relación con las demás.

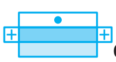
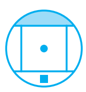


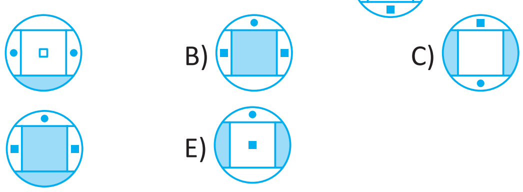
21. ¿Qué figura no se relaciona con las demás?



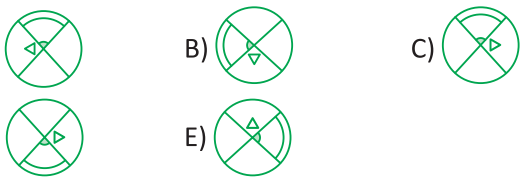
22. ¿Cuál de las siguientes figuras no guarda relación con las demás?



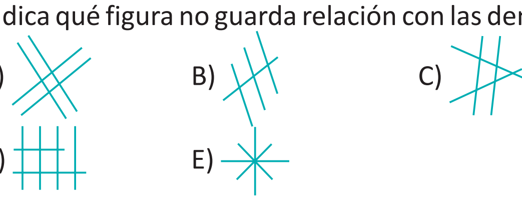
23. Si  es a  como  es a:



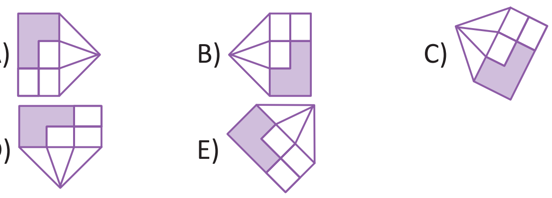
24. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



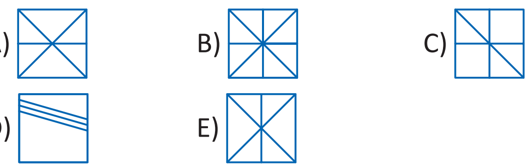
25. Indica qué figura no guarda relación con las demás.



26. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



27. ¿Cuál de las figuras mostradas no guarda relación con las demás?



Claves

NIVEL 1	6. E	11. B	17. A	22. A
1. B	7. B	12. B	NIVEL 3	23. B
2. A	8. C	13. E	18. D	24. C
3. B	9. D	14. B	19. A	25. D
4. C	NIVEL 2	15. C	20. B	26. D
5. E	10. D	16. D	21. E	27. D